Теорема Фаркаша

Теорема 1.1.4.4. (Фаркаша)

Для того чтобы $\| A \| \| x \| = \| b \|$ – система m линейных уравнений с n неизвестными имела *неотрицательное* частное решение (то есть решение $\| x^0 \| \geq \| o \|$), необходимо и достаточно, чтобы $\| y \|$ – каждое частное решение системы линейных неравенств $\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| \leq \| o \|$ – удовлетворяло условию

$$\| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| \leq 0 .$$

Доказательство.

Докажем необходимость.

Пусть система линейных уравнений $\| A \| \| x \| = \| b \|$ имеет "неотрицательное" частное решение, то есть, покомпонентно удовлетворяющее условию $\| x^0 \| \geq \| o \|$. Покажем, что в этом случае для каждого решения системы линейных неравенств $\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| \leq \| o \|$ выполнено условие $\| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| \leq 0$. Действительно,

$$\| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| = (\| A \| \| x^0 \|)^{\mathrm{T}} \| y \| = \| x^0 \|^{\mathrm{T}} (\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \|) \leq 0,$$

поскольку n-компонентная строка с неотрицательными элементами $\| x^0 \|^{\mathrm{T}}$ умножается справа на n-компонентный столбец $\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \|$ с неположительными элементами.

Докажем достаточность.

Пусть матрица $\| A \|$ задает линейное отображение вида $\widehat{A} : E^n \to E^m$, столбцы $\| b \|, \| y \|$ задают элементы $b, y \in E^m$, а столбцы $\| x \|, \| x^0 \|$ – элементы $x, x^0 \in E^n$. Обозначим через Ω множество всех элементов $v \in E^m$ таких, что $v = \widehat{A}x \quad \forall x \geq o$. Оно очевидно выпуклое. Если для *каждого* решения системы линейных неравенств $\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| \leq \| o \|$ выполнено условие $\| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| \leq 0$ и при этом $b \in \Omega$, то достаточность доказана.

Допустим, что $b \notin \Omega$. Покажем, что в этом случае не для каждого решения системы линейных неравенств $\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| \le \| o \|$ выполнено условие $\| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| \le 0$.

Действительно, пусть элемент $u \in \Omega \subset E^m$ – проекция b на Ω.

Заметим, что здесь (без доказательства) мы предположили замкнутость Ω, которая гарантирует существование проекции.

Тогда для элемента $y' = b - u$ справедливы оценки:

1°. В силу теоремы 1.1.4.1 $(y', v - b) < 0 \ \forall v \in \Omega$, но поскольку $o \in \Omega$, то $(y', b) > 0$;

2°. По теореме 1.1.3.2 $(v - u, b - u) \le 0 \ \forall v \in \Omega$ или $(v - u, y') \le 0 \ \forall v \in \Omega$. Очевидно, что элемент $v + u$ также будет принадлежать множеству Ω. Тогда из последнего неравенства получаем $(v, y') \le 0 \ \forall v \in \Omega$. Откуда следует оценка

$$(v, y') = (\widehat{A}x, y') = (x, \widehat{A}^{+} y') \le 0 \qquad \forall x \ge o\,.$$

В силу произвольности $\| x \| \geq \| o \|$ имеем $\left\| \widehat{A}^{+} y' \right\| \leq \| o \|$. То есть из $b \notin \Omega$ вытекает существование y' такого, что

$$\begin{cases} \| A \|^{\mathrm{T}} \| y' \| \leq \| o \|, \\ \| b \|^{\mathrm{T}} \| y' \| > 0, \end{cases}$$

поскольку $\left\| \widehat{A}^{+} \right\|_{e} = \| A \|^{\mathrm{T}}$.

Теорема доказана.