

Обоснование метода функций обратных связей

Сходимость метода функций обратных связей

Вспомогательная функция $U(\tau, X, \Lambda)$ и условия ее стационарности для задачи (1.1.1) соответственно будут иметь вид

$$U(\tau, X, \Lambda) = L(X, \Lambda) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i), \quad (1.3.2)$$

и

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{X}, \bar{\Lambda}) = 0 & j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\bar{X}, \bar{\Lambda}) = -Q(\tau, \bar{\lambda}_i) & i = \overline{1, m}, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{X}, \bar{\Lambda}) = 0 & j = \overline{1, n}, \\ f_i(\bar{X}) = -Q(\tau, \bar{\lambda}_i) & i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (1.3.3)$$

где $L(X, \Lambda) = F(X) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(X)$.

Для обоснования метода функций обратных связей. надо показать, что равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, \bar{X}_\tau, \bar{\Lambda}_\tau) = F(X^*)$$

справедливо для каждого решения задачи (1.1.1).

Предварительно отметим, что система условий (1.3.3) стационарности вспомогательной функции $U(\tau, X, \Lambda)$ не содержит ограничений типа «неравенство». Но по структуре она аналогична формулировке теоремы 1.1.1 (Каруша-Куна-Таккера). Поэтому функцию $U(\tau, X, \Lambda)$ можно рассматривать как некоторую *модификацию* функции Лагранжа.

Данная модификация заключается в добавлении к регулярной функции Лагранжа слагаемых с $R(\tau, s)$. Поэтому вначале исследуем свойства этой добавки.

Будем предполагать, что *нелинейная* задача (1.1.1) имеет локальное решение с конечным значением F^* в, быть может, не единственной точке X^* .

Пусть для этой задачи регулярная функция Лагранжа

$$L(X, \Lambda) = F(X) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(X),$$

имеет седловую точку $\{X^*; \Lambda^*\}$ с $L(X^*, \Lambda^*) = F^*$.

Предположим также, что существуют компактные, с непустой внутренностью множества $\Omega_x \subseteq E^n$ $\Omega_\lambda \subseteq E_+^m$ ¹ такие, что $X^* \in \text{int } \Omega_x$ и $\Lambda^* \in \text{int } \Omega_\lambda$. При этом функция $L(X, \Lambda)$ в сделанных предположениях непрерывна в $\Omega = \Omega_x \otimes \Omega_\lambda$.

¹ E_+^m обозначает положительный ортант в E^m .

Введем функцию обратных связей $Q(\tau, s) \quad \forall \tau > 0$ и $\forall s > 0$.

Уточним ее вид, воспользовавшись условием (1.1.4), из которого следует, что функция $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$ имеет вид $\Phi\left(\frac{s}{\tau}\right)$, где $\Phi(u)$ является строго монотонной и непрерывно дифференцируемой функцией одного аргумента $u = \frac{s}{\tau}$.

Тогда $Q(\tau, s) = \tau\Psi(s)$, где $\Psi(s)$ есть функция, обратная к функции $\Phi(u)$.

Действительно, по определению обратной функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, Q) = s &\quad \Longrightarrow \quad \Phi\left(\frac{Q}{\tau}\right) = s &\quad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \quad \frac{Q}{\tau} = \Psi(s) &\quad \Longrightarrow \quad Q(\tau, s) = \tau\Psi(s). \end{aligned}$$

В силу сделанных предположений функция $\Psi(s)$ обладает следующими свойствами:

1°. $\Psi(s)$ строго монотонно возрастает по s и при этом

$$\lim_{s \rightarrow +0} \Psi(s) = -\infty, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \Psi(s) = +\infty.$$

2°. В своей области определения функция $\Psi(s)$ непрерывно дифференцируема.

Кроме того, $\forall s \in (0, +\infty)$ существует неотрицательная функция $R(\tau, s)$ такая, что

$$R(\tau, s) = \tau \int_{\theta}^s \Psi(u) du, \quad (2.1.1)$$

где θ есть решение уравнения $\Psi(\theta) = 0$. Из свойства 1° следует, что решение этого уравнения существует и единственно.

Таким образом, для задачи (1.1.1) по определению введена вспомогательная функция

$$U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda) + W(\tau, \Lambda), \quad \text{где} \quad W(\tau, \Lambda) = \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i). \quad (2.1.2)$$

Свойства функций $R(\tau, s)$, $W(\tau, \Lambda)$ и $U(\tau, X, \Lambda)$ описывают следующие утверждения.

Лемма 2.1.1. Функция $R(\tau, s)$:

- 1) неотрицательна, дважды непрерывно дифференцируема и для нее справедливо предельное равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} R(\tau, s) = 0 \quad \forall s \in (0, +\infty),$$

причем данный предельный переход монотонный.

- 2) строго выпукла при $s > 0$ и $\frac{\partial^2 R}{\partial s^2} > 0$,
- 3) имеет при $s = \theta$ единственный минимум, в котором $R(\tau, \theta) = 0$.

Лемма 2.1.2. Функция $W(\tau, \Lambda)$ имеет для любого фиксированного $\tau > 0$ единственный нулевой минимум по $\Lambda \in E_+^m$ в точке с координатами $\lambda_i = \theta \quad i = \overline{1, m}$.

По построению множество $\Omega = \Omega_x \otimes \Omega_\lambda$ есть компакт в $E^n \otimes E_+^m$. Тогда справедлива

Теорема 2.1.1. U -функция имеет единственную седловую точку $\{ \bar{X}(\tau); \bar{\Lambda}(\tau) \} \in \Omega$, где вектор-функции $\bar{X}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ при фиксированном $\tau > 0$ суть решения системы уравнений

$$\begin{cases} \text{grad}_x U(\tau, \bar{X}, \bar{\Lambda}) = o, \\ \text{grad}_\lambda U(\tau, \bar{X}, \bar{\Lambda}) = o. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Система уравнений (2.1.3) может быть записана также в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = o & j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -Q(\tau, \lambda_i) & i = \overline{1, m} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\bar{X}) - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{X}) = o & j = \overline{1, n}, \\ f_i(\bar{X}) = Q(\tau, \bar{\lambda}_i) & i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (2.1.4)$$

который оправдывает использование для функции $Q(\tau, s)$ наименования «*функция обратных связей*».

Действительно, посмотрим на вторую группу ограничений системы (2.1.4). Здесь активным ограничениям задачи (1.1.1) соответствуют малые по модулю значения $Q(\tau, \bar{\lambda}_i)$. Для неактивных ограничений ситуация противоположная.

Кроме того из $\bar{\lambda}_i f_i(\bar{X}) = \bar{\lambda}_i Q(\tau, \bar{\lambda}_i) = \bar{\lambda}_i \tau \Psi(\bar{\lambda}_i) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +0$ следует выполнение условий *дополняющей нежесткости*.

Вектор-функцию $\{\bar{X}(\tau); \bar{\Lambda}(\tau)\}$ будем называть *седловой траекторией* функции $U(\tau, X, \Lambda)$. И будем также предполагать, что $\exists \tau_0 > 0$, такое, что $\forall \tau \in (0, \tau_0]$

$$\begin{cases} \bar{X}(\tau) \in \Omega_x, \\ \bar{\Lambda}(\tau) \in \Omega_\lambda. \end{cases}$$

Теорема 2.1.2. *На седловой траектории задачи (1.1.1)*

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, \bar{X}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = F^*, \quad (2.1.5)$$

а в случае локальной единственности решения задачи (1.1.1) справедливы также равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{X}(\tau) = X^* \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau) = \Lambda^*. \quad (2.1.6)$$

Заметим, что теорема 2.1.2, в сочетании со свойствами функции $R(\tau, s)$, позволяет использовать условия (как необходимые, так и достаточные) применимые к регулярной функции Лагранжа, и к функции (2.1.2).

Важное свойство вектор-функций $\{\bar{X}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\}$ описывает

Теорема 2.1.3. **Вектор-функции $\{\bar{X}(\tau); \bar{\Lambda}(\tau)\}$ непрерывно дифференцируемы $\forall \tau \in (0, \tau_0)$.**

Функции обратных связей в линейном случае

Доказательство сходимости метода функций обратных связей основано на предположении о существовании для каждой точки из X^* *непустой компактной окрестности*, в которой существует регулярная и непрерывная функция Лагранжа задачи (1.1.1). В этой окрестности аппроксимации решений нелинейной задачи, получаемые методом функций обратных связей, оказываются существующими, непрерывными и достаточно гладкими вектор-функциями.

В случае *линейной*² задачи (1.1.1) это условие оказывается менее жестким. Конкретно: аппроксимации решений для *любой* линейной задачи (1.1.1) обладают такими же свойствами во *всем* пространстве $E^n \otimes E^m$.

²Хотя система (1.2.7) при этом по-прежнему нелинейная.

Применим для решения пары линейных задач (1.2.1)–(1.2.2), сформулированных в симметричном виде, метод функций обратных связей.

Пусть существует непрерывно дифференцируемая функция $Q(\tau, s)$, которая $\forall \tau > 0$ монотонно возрастает по $s \forall s > 0$. Кроме того,

$$\lim_{s \rightarrow +0} Q(\tau, s) = -\infty \quad \forall \tau > 0, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} Q(\tau, s) = +\infty \quad \forall \tau > 0$$

$$\text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} Q(\tau, s) = 0 \quad \forall s > 0.$$

Через $R(\tau, s)$ обозначим *неотрицательную* и имеющую единственный ноль $\forall s > 0$ функцию, для которой справедливо равенство

$$\frac{\partial R}{\partial s} = Q(\tau, s). \tag{2.2.1}$$

В сделанных предположениях функция $R(\tau, s)$ существует и единственна для каждой конкретной $Q(\tau, s)$.

Для пары задач (1.2.1) – (1.2.2) используем вспомогательную функцию вида

$$U(\tau, X, \Lambda) = \sum_{j=1}^n (\sigma_j x_j - R(\tau, x_j)) + \sum_{i=1}^m (\beta_i \lambda_i + R(\tau, \lambda_i)) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_j \lambda_i. \tag{2.2.2}$$

Стационарные точки такой U -функции (по совокупности компонент векторов $\{ X; \Lambda \}$) суть решения системы (1.2.7).

Лемма 2.2.1. Функция $U(\tau, X, \Lambda)$ строго выпукла по компонентам X и строго вогнута по компонентам $\Lambda \ \forall \tau > 0$ в любой конечной точке с положительными координатами пространства $E^n \otimes E^m$.

Будет справедлива

Теорема 2.2.2. Система уравнений (1.2.7) имеет единственное решение с положительными компонентами при любом фиксированном $\tau > 0$ для *любой* пары задач (1.2.1) — (1.2.2).

Другие, полезные при решении практических задач, свойства U -функции описываются следующими теоремами.

Теорема 2.2.3. Если $L(X, \Lambda)$ — функция Лагранжа пары задач (1.2.1) и (1.2.2), то $\forall X$ и $\forall \Lambda$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, X, \Lambda) = L(X, \Lambda). \quad (2.2.15)$$

Для линейных задач (1.2.1) и (1.2.2) будем называть:

множество точек $\{\bar{X}(\tau); \bar{\Lambda}(\tau)\} \quad \forall \tau > 0$ пространства $E^n \otimes E^m$ *седловой траекторией* U -функции пары задач (1.2.1) и (1.2.2).

Из теоремы 2.2.1 следует как существование $\forall \tau > 0$ вектор-функций $\bar{X}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$, так и функции $\bar{U}(\tau) = U(\tau, \bar{X}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau))$. Для них также оказываются справедливыми утверждения.

Теорема 2.2.4. В задачах (1.2.1) и (1.2.2), имеющих ограниченные оптимальные значения целевых функций, вектор-функции $\bar{X}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ имеют ограниченные компоненты на множестве $\forall \tau > 0$.

Теорема 2.2.5 Для пары задач (1.2.1) и (1.2.2) вектор-функции $\bar{X}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ непрерывно дифференцируемы $\forall \tau > 0$.

Следствие 2.2.1. На седловой траектории для пары задач (1.2.1) и (1.2.2) с ограниченными решениями существуют конечные пределы

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{X}(\tau), \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau)$$

и

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U\left(\tau, \bar{X}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\right).$$

Свойства этих пределов описывают следующие, согласующиеся с теорией линейного программирования, теоремы.

Теорема 2.2.6. На седловой траектории для пары линейных взаимодвойственных задач с ограниченными решениями вида (1.2.1) и (1.2.2), имеют место равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\lambda}_i(\tau) f_i(\bar{X}(\tau)) = 0 \quad i = \overline{1, m},$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}_j(\tau) g_j(\bar{\Lambda}(\tau)) = 0 \quad j = \overline{1, n},$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \left(F(\bar{X}(\tau)) - G(\bar{\Lambda}(\tau)) \right) = 0.$$

Теорема 2.2.7. На седловых траекториях для пары задач (1.2.1) и (1.2.2)

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U\left(\tau, \bar{X}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)\right) = F(X^*) = G(\Lambda^*), \quad (2.2.21)$$

а в случае единственности решений пары задач (1.2.1) и (1.2.2) справедливы также равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{X}(\tau) = X^* \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau) = \Lambda^*. \quad (2.2.22)$$

Отметим также, что существование и единственность седловой точки позволяет использовать U -функцию для устранения неоднозначности решений в задачах линейного программирования.

В заключение приведем примеры решения методом функций обратных связей взаимодвойственных пар задач линейного программирования с различными типами решений.

Из теории известно [1, 9], что возможны только три следующих случая:

- 1°. Обе задачи пвры имеют ограниченное решение.
- 2°. Одна из задач несовместна, а другая имеет неограниченное решение.
- 3°. Обе задачи несовместны.

Рассмотренные в § 1.2 задачи 1.2.1 и 1.2.2 иллюстрируют случай 1°. Для остальных случаев используем функцию обратных связей опять же вида $Q(\tau, s) = \tau \left(s - \frac{1}{s} \right) \quad s > 0$.

Случай 2° иллюстрирует

Задача 2.2.1. Для пары задач:

прямая задача:

максимизировать в E^2 функцию $F(x) = 2x_1$,

при условиях

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ и

$-x_1 + x_2 \leq 1$;

двойственная задача:

минимизировать в E^2 функцию $G(\lambda) = \lambda$,

при условиях $\lambda \geq 0$ и

$-\lambda \geq 2$; $\lambda \geq 0$.

Для прямой задачи значение x_1 может быть сколь угодно большим по модулю. Двойственная задача здесь несовместна.

Система (1.2.7) для этого случая имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + \bar{\lambda} = -\tau \left(\bar{x}_1 - \frac{1}{\bar{x}_1} \right), \\ -\bar{\lambda} = -\tau \left(\bar{x}_2 - \frac{1}{\bar{x}_2} \right), \\ 1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \tau \left(\bar{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}} \right). \end{array} \right. \quad (2.2.25)$$

Ее решения для различных значений параметра τ приведены в табл. 2.2.1а и табл. 2.2.1б. При этом для краткости использованы обозначения:

$$\begin{aligned} F_\tau &= 2\bar{x}_1, \\ f_\tau &= 1 - \bar{x}_1 + \bar{x}_2, \\ G_\tau &= \bar{\lambda}, \\ g_{1\tau} &= 2 + \bar{\lambda}, \\ g_{2\tau} &= -\bar{\lambda}. \end{aligned}$$

Таблица 2.2.1а.
Решения системы (2.2.25) для задачи 2.2.1

τ	$\bar{x}_{1\tau}$	$\bar{x}_{2\tau}$	F_τ	f_τ
10^{-1}	9.604136568	10.594374945	19.208273137	-0.009761623
10^{-2}	99.510049126	100.509949374	199.020098251	-0.000099751
10^{-3}	999.501000499	1000.500999000	1999.002001000	-0.000001000
10^{-4}	9999.500100000	10000.500100000	19999.000200000	-0.000000010
10^{-5}	99999.500010000	100000.500000000	199999.000000000	0.000000000
10^{-6}	999999.500000000	1000000.500000000	1999999.000000000	0.000000000
10^{-7}	9999999.500000000	10000000.500000000	19999999.000000000	0.000000000
10^{-8}	99999999.500000000	100000000.500000000	199999999.000000000	0.000000000

Таблица 2.2.1б.
Решения системы (2.2.25) для задачи 2.2.1

τ	$\bar{\lambda}_\tau$	G_τ	$g_{1\tau}$	$g_{2\tau}$
10^{-1}	-1.049998523	-1.049998523	0.950001477	1.049998523
10^{-2}	-1.005000001	-1.005000001	0.994999999	1.005000001
10^{-3}	-1.000500000	-1.000500000	0.999500000	1.000500000
10^{-4}	-1.000050000	-1.000050000	0.999950000	1.000050000
10^{-5}	-1.000005000	-1.000005000	0.999995000	1.000005000
10^{-6}	-1.000000500	-1.000000500	0.999999500	1.000000500
10^{-7}	-1.000000050	-1.000000050	0.999999950	1.000000050
10^{-8}	-1.000000005	-1.000000005	0.999999995	1.000000005

Наконец, случай 3° иллюстрирует

Задача 2.2.2. Для пары задач: **прямая задача:**

максимизировать в E^2 функцию $F(x) = 2x_1 + 3x_2$,

при условиях

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad \text{и}$$

$$x_1 - x_2 \leq 1, \quad -x_1 + x_2 \leq -5;$$

двойственная задача:

минимизировать в E^2 функцию $G(\lambda) = \lambda_1 - 5\lambda_2$,

при условиях $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ и

$$\lambda_1 - \lambda_2 \geq 2, \quad -\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3.$$

Здесь обе задачи несовместны. Ее решения для различных значений параметра τ приведены в табл. 2.2.2а и табл. 2.2.2б. Для краткости в этих таблицах используем обозначения:

$$F_\tau = 2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2,$$

$$f_{1\tau} = -1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2,$$

$$f_{2\tau} = 5 - \bar{x}_1 + \bar{x}_2,$$

$$G_\tau = \bar{\lambda}_1 - 5\bar{\lambda}_2,$$

$$g_{1\tau} = -2 + \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2,$$

$$g_{2\tau} = -3 - \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2.$$

Таблица 2.2.2а.

Решения системы (2.2.26) для задачи 2.2.2

τ	\bar{x}_1	\bar{x}_2	F_τ	$f_{1\tau}$	$f_{2\tau}$
10^{-1}	26.523821049	23.556332339	123.716639117	1.967488710	2.032511290
10^{-2}	251.502712579	248.505287580	1248.521288000	1.997424999	2.002575001
10^{-3}	2501.500275000	2498.500525000	12498.502130000	1.999749250	2.000250750
10^{-4}	25001.500030000	24998.500050000	124998.500200000	1.999974993	2.000025007
10^{-5}	250001.500000000	249998.500000000	1249998.500000000	1.999997500	2.000002500
10^{-6}	2500001.500000000	2499998.500000000	12499998.500000000	1.999999750	2.000000250
10^{-7}	25000001.500000000	24999998.500000000	124999998.500000000	1.999999974	2.000000026
10^{-8}	250000001.500000000	250000001.500000000	1249999999.000000000	2.000000000	2.000000000

Система (1.2.7) для этого случая принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \tau \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\ 5 - \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \tau \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right), \\ -2 + \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 = -\tau \left(\bar{x}_1 - \frac{1}{\bar{x}_1} \right), \\ -3 - \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = -\tau \left(\bar{x}_2 - \frac{1}{\bar{x}_2} \right). \end{array} \right. \quad (2.2.26)$$

Таблица 2.2.2б.
Решения системы (2.2.26) для задачи 2.2.2

τ	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	G_τ	$g_{1\tau}$	$g_{2\tau}$
10^{-1}	19.725582687	20.374194596	-82.145390291	-2.648611909	-2.351388091
10^{-2}	199.747506201	200.262493566	-801.564961628	-2.514987365	-2.485012635
10^{-3}	1999.749750000	2000.251250000	-8001.506500000	-2.501499875	-2.498500125
10^{-4}	19999.749980000	20000.250120000	-80001.500650000	-2.500149999	-2.499850001
10^{-5}	199999.750000000	200000.250000000	-800001.500100000	-2.500015000	-2.499985000
10^{-6}	1999999.750000000	2000000.250000000	-8000001.500000000	-2.500001500	-2.499998500
10^{-7}	19999999.750000000	20000000.250000000	-80000001.500000000	-2.500000149	-2.499999851
10^{-8}	199999999.700000000	200000000.300000000	-800000001.500000000	-2.500000030	-2.499999970

Линейная экстраполяция в методе функций обратных связей

Из теоремы 2.1.2 следует, что для достаточно малых положительных значениях τ метод функций обратных связей локально сходится к одному из решений задачи (1.1.1) при $\tau \rightarrow +0$. Иначе говоря, погрешность аппроксимации снижается при уменьшении абсолютной величины τ .

Однако, для получения лучшего качества аппроксимации непосредственное уменьшение модуля инструментального параметра τ не всегда приводит к желаемому результату. Причиной этого оказывается ухудшение обусловленности системы (2.1.3) при $\tau \rightarrow +0$.

Рассмотрим альтернативный алгоритм снижения погрешности метода функций обратных связей, лишенный этого недостатка.

Непрерывно дифференцируемые вектор-функции $\bar{X}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ удовлетворяют системе уравнений (2.1.3) на седловой траектории задачи (1.1.1). Тогда по теореме о неявных функциях [17] для них на интервале $\tau \in (0, \tau_0)$ справедливы формулы Тейлора первого порядка

$$\bar{X}(\tau + \Delta) = \bar{X}(\tau) + \frac{d\bar{X}}{d\tau}\Delta + o(\Delta) \quad \text{и} \quad \bar{\Lambda}(\tau + \Delta) = \bar{\Lambda}(\tau) + \frac{d\bar{\Lambda}}{d\tau}\Delta + o(\Delta).$$

Если в этих равенствах перейти к пределу при $\Delta \rightarrow -\tau + 0$, то

$$X^* = \bar{X}(\tau) - \frac{d\bar{X}}{d\tau}\tau + o(\tau) \quad \text{и} \quad \Lambda^* = \bar{\Lambda}(\tau) - \frac{d\bar{\Lambda}}{d\tau}\tau + o(\tau).$$

Откуда получаются уточненные оценки для аппроксимации решений X^* и Λ^* вида:

$$x^+ = \bar{X}(\tau) - \frac{d\bar{X}}{d\tau}\tau \quad \text{и} \quad \lambda^+ = \bar{\Lambda}(\tau) - \frac{d\bar{\Lambda}}{d\tau}\tau. \quad (2.4.1)$$

Значения компонент производных в (2.4.1) находятся (согласно теореме о системе неявных функций) из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial x_j} \frac{d\bar{x}_j}{d\tau} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial \lambda_i} \frac{d\bar{\lambda}_i}{d\tau} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial \tau} & p = \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial x_j} \frac{d\bar{x}_j}{d\tau} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial \lambda_i} \frac{d\bar{\lambda}_i}{d\tau} = -\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial \tau} & q = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (2.4.2)$$

которая получается дифференцированием системы уравнений (2.1.3) по параметру τ . Система (2.4.2) имеет невырожденную основную матрицу (см. теорему 2.1.3) и аналогична системе уравнений (2.3.7) для экзогенного векторного параметра V .

Из курса математического анализа известно, что, если коэффициент τ достаточно мал по модулю, то в силу свойств функции $o(\tau)$, норма разности векторов $\{X^+, \Lambda^+\}$ и $\{X^*, \Lambda^*\}$ будет меньше, чем норма разности $\{\bar{X}, \bar{\Lambda}\}$ и $\{X^*, \Lambda^*\}$.

Однако может оказаться, что использование формул (2.4.1) все же не дает нужного уровня погрешности. Тогда возникает вопрос о возможности и целесообразности *итеративного* (то есть неоднократного последовательного) применения этих формул.

Формальное применять формулы (2.4.1) для дальнейшего повышения точности нельзя. Действительно, точка $\{X^+, \lambda^+\}$ уже не является решением системы (2.1.3) и для нее не будет верна теорема о неявных функциях.

То есть в общем случае эта точка не будет принадлежать седловой траектории (см. рис. 2.4.1А).

Сделать возможным использование равенств (2.4.1) для итерационного уточнения решения задачи (1.1.1) в методе функций обратных связей позволяет следующий прием.

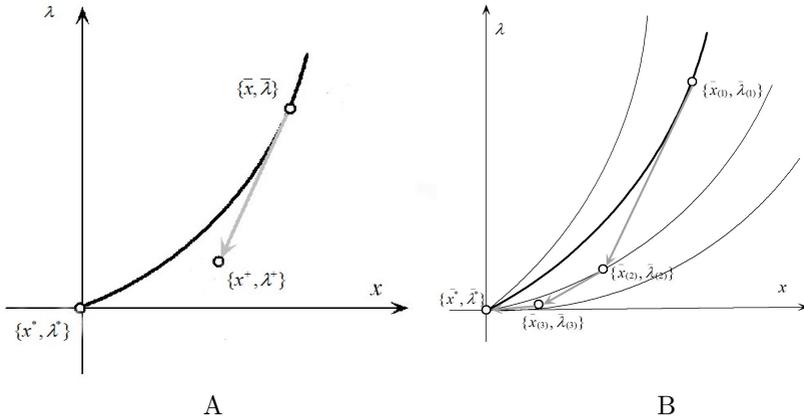


Рис. 2.4.1. Седловые траектории в последовательной линейной экстраполяции для метода функций обратных связей

Пусть в постановке задачи (1.1.1) условия неотрицательности компонент вектора X выделены в отдельную, от остальных неравенств $f_i(X) \leq 0 \quad i = \overline{1, m}$, группу. Тогда

$$U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda) - \sum_{j=1}^n R(\tau, x_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i). \quad (2.4.3)$$

Введем новый инструментальный параметр $\vec{\tau}$ с координатным представлением

$$\| \tau_{x1} \tau_{x2} \dots \tau_{xn} \tau_{\lambda1} \tau_{\lambda2} \dots \tau_{\lambda m} \|^\top,$$

компоненты которого суть положительные константы. Затем в формуле (2.4.3) заменим в каждом слагаемом с функцией R скалярный параметр τ на соответствующую компоненту вектора $\vec{\tau}$.

При такой замене мы получим семейство вспомогательных функций

$$U(\vec{\tau}, X, \Lambda) = L(X, \Lambda) - \sum_{j=1}^n R(\tau_{xj}, x_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau_{\lambda i}, \lambda_i). \quad (2.4.4)$$

Заметим, что

- во-первых, функция (2.4.4) совпадает с (2.4.3), если все компоненты вектора $\vec{\tau}$ равны τ ,
- во-вторых, основные свойства и стационарные точки у всех функций (2.4.4) одинаковые.

Откуда следует, что семейство непрерывно дифференцируемых вспомогательных функций (2.4.4) порождает пучок гладких седловых траекторий, проходящих через точку $\{X^*, \Lambda^*\}$ (см. рис. 2.4.1в).

Суть предлагаемого приема заключается в подборе значений компонент вектора $\vec{\tau}$, которые обеспечивают попадание уточненной аппроксимации решения $\{X^+, \Lambda^+\}$ на некоторую *новую* траекторию, ведущую в $\{X^*, \Lambda^*\}$. Для этой новой траектории теорема о неявных функциях в точке $\{X^+, \Lambda^+\}$ выполняется. Поэтому повторное и неоднократное использование формул аналогичных (2.4.1) уже возможно.

Графическая интерпретация описанной схемы приведена на рис. 2.4.1в. Поскольку итоговая траектория оказывается кусочно прямой линией, то построенную процедуру можно назвать *последовательной линейной экстраполяцией*.

Приведем формальное описание метода линейной экстраполяции.

Процедура итеративного улучшения оценок для X^* и Λ^* выполняется по следующим из (2.4.1) формулам $\forall t = 0, 1, 2, \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_{j(t+1)} = \bar{x}_{j(t)} - \tau_{xj(t)} \frac{d\bar{x}_j}{d\tau_{xj(t)}} \quad j = \overline{1, n}, \\ \bar{\lambda}_{i(t+1)} = \bar{\lambda}_{i(t)} - \tau_{\lambda i(t)} \frac{d\bar{\lambda}_i}{d\tau_{\lambda i(t)}} \quad i = \overline{1, m}. \end{array} \right. \quad (2.4.5)$$

Значения производных в (2.4.5) вычисляются в точках $\{\bar{X}_{(t)}, \bar{\Lambda}_{(t)}\}$ по формулам аналогичным (2.4.2).

Выбор значений $\{\tau_{x1} \tau_{x2} \dots \tau_{xn} \tau_{\lambda 1} \tau_{\lambda 2} \dots \tau_{\lambda m}\}$ в формулах (2.4.5) делается $\forall t = 0, 1, 2, \dots$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad}_x \hat{U}(\vec{\tau}_{(t+1)}, \bar{X}_{(t+1)}, \bar{\Lambda}_{(t+1)}) = o, \\ \text{grad}_\lambda \hat{U}(\vec{\tau}_{(t+1)}, \bar{X}_{(t+1)}, \bar{\Lambda}_{(t+1)}) = o. \end{array} \right. \quad (2.4.6)$$

При этом в силу (2.1.1) этот пересчет сводится к решению $n + m$ линейных уравнений с одним неизвестным каждое, имеющих вид

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} (\bar{X}_{(t)}, \bar{\Lambda}_{(t)}) - \tau_{xj(t+1)} \Psi(\bar{x}_{j(t)}) = 0 & j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} (\bar{X}_{(t)}, \bar{\Lambda}_{(t)}) - \tau_{\lambda i(t+1)} \Psi(\bar{\lambda}_{i(t)}) = 0 & i = \overline{1, m} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} (\bar{X}_{(t)}, \bar{\Lambda}_{(t)}) - \tau_{xj(t+1)} \Psi(\bar{x}_{j(t)}) = 0 & j = \overline{1, n}, \\ f_i (\bar{X}_{(t)}) - \tau_{\lambda i(t+1)} \Psi(\bar{\lambda}_{i(t)}) = 0 & i = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (2.4.7)$$

Значения производных в (2.4.3) для каждой итерации t находятся из (аналогичной (2.4.2)) системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial x_j} \frac{d\bar{x}_j}{d\tau_{x_j(t)}} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial \lambda_i} \frac{d\bar{\lambda}_i}{d\tau_{\lambda_i(t)}} = - \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial \tau_{x_p(t)}} \quad p = \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial x_j} \frac{d\bar{x}_j}{d\tau_{x_j(t)}} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial \lambda_i} \frac{d\bar{\lambda}_i}{d\tau_{\lambda_i(t)}} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial \tau_{\lambda_q(t)}} \quad q = \overline{1, m}. \end{array} \right. \quad (2.4.8)$$

Итеративное применение формул (2.4.5)–(2.4.8) является локально сходящейся процедурой.

Эта сходимость следует из свойств тейлоровской аппроксимации и очевидной сжимаемости, определяемого формулами (2.4.5)–(2.4.8), оператора, при стремящейся к нулю норме вектора $\vec{\tau}$.

Практическое применение процедуры последовательной линейной экстраполяции иллюстрирует

Пример 2.4.1.

$$\begin{aligned} & \text{Максимизировать} && F = -(x_1 - 1)^2 - x_2^2 \\ & \text{при условиях} && x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \text{ и } x_1 + 2x_2 \leq 3, \quad x_1^2 - x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Решение.

Пусть функция обратных связей $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)$, тогда соответствующая ей функция $R(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(\frac{s^2}{2} - \ln s - \frac{1}{2} \right)$.

В данном примере вместо скалярного параметра τ используем четырехмерный вектор $\vec{\tau}$ с координатным столбцом $\| \tau_{x_1} \tau_{x_2} \tau_{\lambda_1} \tau_{\lambda_2} \|^\top$.

Вспомогательная U -функция имеет вид

$$\begin{aligned} U(\tau, x, \lambda) = & -(x_1 - 1)^2 - x_2^2 - \lambda_1(-3 + x_1 + 2x_2) - \lambda_2(x_1^2 - x_2) - \\ & - R(\tau_{x_1}, x_1) - R(\tau_{x_2}, x_2) + R(\tau_{\lambda_1}, \lambda_1) + R(\tau_{\lambda_2}, \lambda_2). \end{aligned}$$

Тогда условия стационарности U -функции для решаемой задачи, то есть система уравнений (2.1.4) будет

$$\left\{ \begin{array}{l} -3 + \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\ \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2 = \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right), \\ -2 \left(\bar{x}_1 - 1 \right) - \bar{\lambda}_1 - 2\bar{x}_1 \bar{\lambda}_2 = \frac{\tau}{2} \left(\bar{x}_1 - \frac{1}{\bar{x}_1} \right), \\ -2\bar{x}_2 - 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = \frac{\tau}{2} \left(\bar{x}_2 - \frac{1}{\bar{x}_2} \right). \end{array} \right. \quad (2.4.9)$$

За начальное приближение в процедуре последовательной линейной экстраполяции примем решение системы (2.4.9) с $\tau = 0.01$, приведенное в таблицах 2.4.1a–2.4.1b.

Используем обозначения

$$f_1(x) = -3 + x_1 + 2x_2,$$

$$f_2(x) = x_1^2 - x_2,$$

$$L(x, \lambda) = -(x_1 - 1)^2 - x_2^2 - \lambda_1(-3 + x_1 + 2x_2) - \lambda_2(x_1^2 - x_2).$$

Таблицы 2.4.1а–2.4.1б.

Решения системы (2.4.9) при $\tau = 0.01$.

τ	$\bar{x}_1(\tau)$	$\bar{x}_2(\tau)$	$\bar{\lambda}_1(\tau)$	$\bar{\lambda}_2(\tau)$	$F(\bar{x}(\tau))$
10^{-2}	0.59002481	0.35181724	$2.930 \cdot 10^{-3}$	0.69704208	-0.51620893

$f_1(\bar{x}(\tau))$	$f_2(\bar{x}(\tau))$	$L(\bar{x}, \bar{\lambda})$	$U(\bar{x}, \bar{\lambda})$
-1.70634071	$-3.688 \cdot 10^{-3}$	-0.50863832	-0.48549662

Последовательное уточнение значений прямых и двойственных переменных будем выполнять по формулам (2.4.5) с использованием решений системы линейных уравнений (2.4.8), основная матрица которой в решаемом примере имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} -\frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{x}_1^2} \right) - 2 - 2\bar{\lambda}_2 & 0 & -1 & -2\bar{x}_1 \\ 0 & -\frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{x}_2^2} \right) - 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} \right) & 0 \\ -2x_1 & 1 & 0 & \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_2^2} \right) \end{array} \right\|,$$

в то время как столбец правых частей этой системы будет

$$\left\| \begin{array}{cccc} -\frac{\tau}{2} \left(\bar{x}_1 - \frac{1}{\bar{x}_1} \right) & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{x}_2 - \frac{1}{\bar{x}_2} \right) & \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right) & \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right) \end{array} \right\|^T.$$

Пусть в процедуре (2.4.5) уточненные значения переменных на итерации с номером $t - 1 \quad \forall t = 1, 2, \dots$ равны соответственно

$$\bar{x}_{1(t)}, \bar{x}_{2(t)} \quad \text{и} \quad \bar{\lambda}_{1(t)}, \bar{\lambda}_{2(t)}.$$

Тогда значения компонент $\vec{\tau}_{(t)}$, гарантирующих принадлежность точки $\{\bar{X}_{(t)}, \bar{\Lambda}_{(t)}\}$ некоторой другой седловой траектории, в силу (2.4.7) будут определяться равенствами

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{x1(t)} = \frac{2\left(-2(\bar{x}_{1(t)} - 1) - \bar{\lambda}_{1(t)} - 2\bar{x}_{1(t)}\bar{\lambda}_{2(t)}\right)}{\bar{x}_{1(t)} - \frac{1}{\bar{x}_{1(t)}}, \\ \tau_{x2(t)} = \frac{2\left(-2\bar{x}_{2(t)} - 2\bar{\lambda}_{1(t)} + \bar{\lambda}_{2(t)}\right)}{\bar{x}_{2(t)} - \frac{1}{\bar{x}_{2(t)}}}, \\ \tau_{\lambda1(t)} = \frac{2\left(-3 + \bar{x}_{1(t)} + 2\bar{x}_{2(t)}\right)}{\bar{\lambda}_{1(t)} - \frac{1}{\bar{\lambda}_{1(t)}}}, \\ \tau_{\lambda2(t)} = \frac{2\left(\bar{x}_{1(t)}^2 - \bar{x}_{2(t)}\right)}{\bar{\lambda}_{2(t)} - \frac{1}{\bar{\lambda}_{2(t)}}}. \end{array} \right.$$

Величина погрешности аппроксимации может быть оценена разными способами.

Во-первых, по значениям двойственных переменных λ_1 и λ_2 , точные значения которых в данной задаче находятся аналитически. Они равны соответственно 0 и λ_2^* , где λ_2^* есть положительный корень уравнения

$$\lambda_2(\lambda_2 + 1)^2 - 2 = 0.$$

Этот корень равен (по формуле Кардано)

$$\lambda_2^* = \frac{\left(\sqrt[3]{28 + 3\sqrt{87}} - 1\right)^2}{3\sqrt[3]{28 + 3\sqrt{87}}} \approx 0.69562077.$$

Во-вторых, это можно сделать, сравнив абсолютные величины целевой функции F и функции Лагранжа L .

Результаты расчетов выполненных в процессе решения примера 2.4.1 приведены в табл. 2.4.2, 2.4.3 и 2.4.4.

Т а б л и ц а 2.4.2

t	$\bar{x}_1(t)$	$\bar{x}_2(t)$	F	$\bar{\lambda}_1(t)$	$\bar{\lambda}_2(t)$
0	0.590024813	0.351817238	-0.291855023	0.002930222	0.697042081
1	0.589788382	0.347873253	-0.289289372	$-1.390 \cdot 10^{-5}$	0.695539663
2	0.589754522	0.347810387	-0.289289372	$1.294 \cdot 10^{-9}$	0.695620736
3	0.589754512	0.347810385	-0.289273424	0	0.695620770

Т а б л и ц а 2.4.3

t	f_1	f_2	L	$L - F$	U
0	-1.706340711	-0.003687958	-0.284284404	0.007570619	-0.261142713
1	-1.714465112	$-2.291 \cdot 10^{-5}$	-0.289297265	$-7.893 \cdot 10^{-6}$	-0.289593289
2	-1.714624703	$8.824 \cdot 10^{-9}$	-0.289273422	$-3.920 \cdot 10^{-9}$	-0.289273422
3	-1.714624718	$-1.11 \cdot 10^{-15}$	-0.289273424	0	-0.290232652

Т а б л и ц а 2.4.4

t	$\tau_{x1}(t)$	$\tau_{x2}(t)$	$\tau_{\lambda1}(t)$	$\tau_{\lambda2}(t)$	$\bar{\lambda}_2(t) - \lambda_2^*$
0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.001421311
1	$9.565 \cdot 10^{-6}$	0.000141717	$-4.767 \cdot 10^{-5}$	$6.176 \cdot 10^{-5}$	$-8.111 \cdot 10^{-5}$
2	$-8.794 \cdot 10^{-9}$	$3.265 \cdot 10^{-8}$	$4.437 \cdot 10^{-9}$	$-2.379 \cdot 10^{-8}$	$-3.373 \cdot 10^{-8}$
3	$-1.41 \cdot 10^{-15}$	0	0	$2.99 \cdot 10^{-15}$	$-4.40 \cdot 10^{-10}$