Верс. 30дек2025г.

Обоснование метода функций обратных связей

Сходимость метода функций обратных связей

Вспомогательная функция $U(\tau, X, \Lambda)$ и условия ее стационарности для нелинейной задачи (1.1.1) имеют соответственно вид

$$U(\tau, X, \Lambda) = L(X, \Lambda) + \sum_{i=1}^{m} R\big(\tau, \lambda_i\big)\,, \tag{1.3.2}$$

и

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j}\big(\overline{X}, \overline{\Lambda}\big) = \quad 0 & j = \overline{1,n}\,, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}\big(\overline{X}, \overline{\Lambda}\big) = -Q(\tau, \overline{\lambda}_i) & i = \overline{1,m}\,, \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j}\big(\overline{X}, \overline{\Lambda}\big) \quad = \quad 0 & j = \overline{1,n}\,, \\ f_i(\overline{X}) = -Q(\tau, \overline{\lambda}_i) & i = \overline{1,m}\,, \end{cases} \tag{1.3.3}$$

где $L(X, \Lambda) = F(X) - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(X)$, где $L(X, \Lambda)$ — регулярная функция Лагранжа этой задачи.

Для обоснования метода функций обратных связей. надо показать, что равенство

$$\lim_{\tau\to+0} U\big(\tau, \overline{X}_\tau, \overline{\Lambda}_\tau\big) = F(X^*)$$

справедливо для каждого решения задачи (1.1.1).

Предварительно отметим, что система условий стационарности вспомогательной функции $U\big(\tau, X, \Lambda\big)$ (1.3.3) не содержит ограничений типа «неравенство». Однако по структуре она аналогична условиям теоремы 1.1.1 (Каруша-Куна-Таккера). Поэтому функцию $U\big(\tau, X, \Lambda\big)$ можно рассматривать как некоторую *модификацию* функции Лагранжа.

Данная модификация заключается в добавлении к регулярной функции Лагранжа слагаемых с $R(\tau, s)$. Исследуем вначале свойства функций $R(\tau, s)$ и $U(\tau, X, \Lambda)$.

Будем предполагать, что задача (1.1.1) имеет *локальное* решение с конечным значением F^* в, быть может, не единственной точке X^*.

Пусть для этой задачи регулярная функция Лагранжа

$$L(X,\Lambda) = F(X) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(X)\,,$$

имеет седловую точку $\{X^*;\Lambda^*\}$ с $L(X^*,\Lambda^*) = F^*$.

Предположим также, что существуют компактные, с непустой внутренностью множества $\Omega_x \subseteq E^n$ $\Omega_\lambda \subseteq E^m_+$ [1] такие, что $X^* \in \operatorname{int}\Omega_x$ и $\Lambda^* \in \operatorname{int}\Omega_\lambda$. Тогда функция $L(X,\Lambda)$ непрерывна в $\Omega = \Omega_x \otimes \Omega_\lambda$.

[1] E^m_+ обозначает положительный ортант в E^m.

Введем *функцию обратных связей* $Q(\tau, s)$ $\forall \tau > 0$ и $\forall s > 0$.

Уточним ее вид, воспользовавшись условием (1.1.4), из которого следует, что функция $\dfrac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$ имеет вид $\Phi\left(\dfrac{s}{\tau}\right)$, где $\Phi(u)$ строго монотонная и непрерывно дифференцируемая функция *одного* аргумента $u = \dfrac{s}{\tau}$.

Покажем, что в этом случае $Q(\tau, s) = \tau\Psi(s)$, где $\Psi(s)$ есть функция, *обратная* к функции $\Phi(u)$. Действительно, по определению обратной функции:

$$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, Q) = s \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi\left(\frac{Q}{\tau}\right) = s \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{Q}{\tau} = \Psi(s) \qquad \Longrightarrow \qquad Q(\tau, s) = \tau\Psi(s)\,.$$

В силу сделанных предположений функция $\Psi(s)$ обладает следующими свойствами:

1°. $\Psi(s)$ строго монотонно возрастает по s и

$$\lim_{s\to+0}\Psi(s)=-\infty,\quad \lim_{s\to+\infty}\Psi(s)=+\infty\,.$$

2°. В своей области определения функция $\Psi(s)$ непрерывно дифференцируема.

Кроме того, $\forall s\in(0,+\infty)$ существует неотрицательная функция $R(\tau,s)$ такая, что

$$R(\tau,s)=\tau\int\limits_{\theta}^{s}\Psi(u)\,du\,, \tag{2.1.1}$$

где θ есть решение уравнения $\Psi\big(\theta\big)=0$. Из свойства 1° следует, что решение этого уравнения существует и единственно.

Таким образом, для задачи (1.1.1) *по определению* введена вспомогательная функция

$$U(\tau,x,\Lambda)\;=\;L(x,\Lambda)+W(\tau,\Lambda)\,,\qquad \text{где}\quad W(\tau,\Lambda)\;=\;\sum_{i=1}^{m}R(\tau,\lambda_i)\,. \tag{2.1.2}$$

Свойства функций $R(\tau, s)$, $W(\tau, \Lambda)$ и $U(\tau, X, \Lambda)$ описывают следующие утверждения.

Лемма 2.1.1. **Функция** $R(\tau, s)$ **:**

1) неотрицательна, дважды непрерывно дифференцируема и для нее справедливо предельное равенство

$$\lim_{\tau \to +0} R(\tau, s) = 0 \qquad \forall s \in (0, +\infty)\,,$$

причем данный предельный переход монотонный.

2) строго выпукла при $s > 0$ **и** $\dfrac{\partial^2 R}{\partial s^2} > 0\,,$

3) имеет при $s = \theta$ **единственный минимум, в котором** $R\big(\tau, \theta\big) = 0\,.$

Лемма 2.1.2. **Функция** $W(\tau, \Lambda)$ **имеет для любого фиксированного** $\tau > 0$ **единственный нулевой минимум по** $\Lambda \in E_+^m$ **в точке с координатами** $\lambda_i = \theta \;\; i = \overline{1, m}\,.$

По построению множество $\Omega = \Omega_x \otimes \Omega_\lambda$ есть компакт в $E^n \otimes E^m_+$. Тогда справедлива

Теорема 2.1.1. **U-функция имеет единственную седловую точку $\{\,\overline{X}(\tau);\,\overline{\Lambda}(\tau)\,\} \in \Omega$, где вектор-функции $\overline{X}(\tau)$ и $\overline{\Lambda}(\tau)$ при фиксированном $\tau > 0$ суть решения системы уравнений**

$$\begin{cases} \operatorname*{grad}_x U(\tau, \overline{X}, \overline{\Lambda}) = o, \\ \operatorname*{grad}_\lambda U(\tau, \overline{X}, \overline{\Lambda}) = o. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Система уравнений (2.1.3) может быть записана также в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = o & j = \overline{1,n}\,, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -Q(\tau, \lambda_i) & i = \overline{1,m} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{X}) - \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{X}) = o & j = \overline{1,n}\,, \\ f_i(\overline{X}) = -Q(\tau, \overline{\lambda}_i) & i = \overline{1,m}\,, \end{cases} \tag{2.1.4}$$

который оправдывает использование для функции $Q(\tau, s)$ наименования «*функция обратных связей*».

Действительно, во второй группе ограничений системы (2.1.4) активным ограничениям задачи (1.1.1) соответствуют малые по модулю значения $Q(\tau, \overline{\lambda}_i)$. Для неактивных ограничений они таковыми не являются.

Кроме того из $\overline{\lambda}_i f_i(\overline{X}) = -\overline{\lambda}_i Q(\tau, \overline{\lambda}_i) = -\overline{\lambda}_i \tau \Psi(\overline{\lambda}_i) \to 0$ при $\tau \to +0$ следует выполнение условий *дополняющей нежесткости*.

Вектор-функцию $\{\overline{X}(\tau);\overline{\Lambda}(\tau)\}$ будем называть *седловой траекторией* функции $U(\tau, X, \Lambda)$. Предположим также, что $\exists\tau_0 > 0$, для которого $\forall\tau \in (0, \tau_0]$

$$\begin{cases} \overline{X}(\tau) \in \Omega_x, \\ \overline{\Lambda}(\tau) \in \Omega_\lambda. \end{cases}$$

Теорема 2.1.2. *На седловой траектории задачи* (1.1.1)

$$\lim_{\tau\to+0} U\Big(\tau, \overline{X}(\tau), \overline{\Lambda}(\tau)\Big) = F^*, \qquad (2.1.5)$$

а в случае локальной единственности решения задачи (1.1.1) *справедливы также равенства*

$$\lim_{\tau\to+0} \overline{X}(\tau) = X^* \qquad \text{и} \qquad \lim_{\tau\to+0} \overline{\Lambda}(\tau) = \Lambda^*. \quad (2.1.6)$$

Важное свойство вектор-функций $\{\overline{X}(\tau), \overline{\Lambda}(\tau)\}$ описывает

Теорема 2.1.3. **Вектор-функции** $\{\overline{X}(\tau);\overline{\Lambda}(\tau)\}$ **непрерывно дифференцируемы** $\forall\tau \in (0, \tau_0)$.

Функции обратных связей в линейном случае

Доказательство сходимости метода функций обратных связей основано на предположении о существовании для каждой точки из X^* *непустой компактной окрестности*, в которой существует регулярная и непрерывная функция Лагранжа задачи (1.1.1). В этой окрестности аппроксимации решений нелинейной задачи, получаемые методом функций обратных связей существуют, непрерывны и достаточно гладкие вектор-функции.

В случае *линейной*[2] задачи (1.1.1) это условие оказывается менее жестким. Конкретно: аппроксимации решений для *любой* линейной задачи (1.1.1) обладают этими свойствами во *всем* пространстве $E^n \otimes E^m$.

[2]Хотя система (1.2.7) при этом по-прежнему нелинейная.

Применим для решения пары линейных задач (1.2.1)—(1.2.2), сформулированных в симметричном виде, метод функций обратных связей.

Пусть существует непрерывно дифференцируемая функция $Q(\tau, s)$, которая $\forall\tau > 0$ монотонно возрастает по s $\forall s > 0$. Кроме того,

$$\lim_{s\to+0} Q(\tau, s) = -\infty \;\; \forall\tau > 0\,, \qquad \lim_{s\to+\infty} Q(\tau, s) = +\infty \;\; \forall\tau > 0$$

$$\text{и} \quad \lim_{\tau\to+0} Q(\tau, s) = 0 \quad \forall s > 0\,.$$

Через $R(\tau, s)$ обозначим *неотрицательную* и имеющую единственный ноль $\forall s > 0$ функцию, для которой справедливо равенство

$$\frac{\partial R}{\partial s} = Q(\tau, s)\,. \tag{2.2.1}$$

В сделанных предположениях функция $R(\tau, s)$ существует и единственна для каждой конкретной $Q(\tau, s)$.

Для пары задач (1.2.1) — (1.2.2) используем вспомогательную функцию вида

$$U(\tau, X, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sigma_j x_j - R(\tau, x_j)\Big) + \sum_{i=1}^{m}\Big(\beta_i\lambda_i + R(\tau, \lambda_i)\Big) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}x_j\lambda_i\,. \tag{2.2.2}$$

Стационарные точки такой U-функции (по совокупности компонент векторов $\{\, X;\, \Lambda \,\}$) суть решения системы (1.2.7).

Лемма 2.2.1. **Функция $U(\tau, X, \Lambda)$ строго выпукла по компонентам X и строго вогнута по компонентам Λ $\forall \tau > 0$ в любой конечной точке с положительными координатами пространства $E^n \otimes E^m$.**

Будет также справедлива

Теорема 2.2.2. **Система уравнений (1.2.7) имеет единственное решение с положительными компонентами при любом фиксированном $\tau > 0$ для *любой* пары задач (1.2.1) — (1.2.2).**

Другие, полезные при решении практических задач, свойства U-функции описываются следующими теоремами.

Теорема 2.2.3. **Если** $L(X,\Lambda)$ **— функция Лагранжа пары задач** (1.2.1) **и** (1.2.2)**, то** $\forall X$ **и** $\forall\Lambda$

$$\lim_{\tau\to+0} U(\tau,X,\Lambda) = L(X,\Lambda)\,. \tag{2.2.15}$$

Из теоремы 2.2.1 следует как существование $\forall\tau > 0$ вектор-функций $\overline{X}(\tau)$ и $\overline{\Lambda}(\tau)$, так и функции $\overline{U}(\tau) = U\Big(\tau,\overline{X}(\tau),\overline{\Lambda}(\tau)\Big)$. Для них также оказываются справедливыми утверждения.

Теорема 2.2.4. **В задачах** (1.2.1) **и** (1.2.2)**, имеющих ограниченные оптимальные значения целевых функций, вектор-функции** $\overline{X}(\tau)$ **и** $\overline{\Lambda}(\tau)$ **имеют ограниченные компоненты на множестве** $\forall\tau > 0$.

Теорема 2.2.5 **Для пары задач** (1.2.1) **и** (1.2.2) **вектор-функции** $\overline{X}(\tau)$ **и** $\overline{\Lambda}(\tau)$ **непрерывно дифференцируемы** $\forall\tau > 0$.

Следствие 2.2.1. **На седловой траектории для пары задач** (1.2.1) **и** (1.2.2) **с ограниченными решениями существуют конечные пределы**

$$\lim_{\tau\to+0}\overline{X}(\tau)\,,\qquad \lim_{\tau\to+0}\overline{\Lambda}(\tau)$$

и

$$\lim_{\tau\to+0}U\Big(\tau,\overline{X}(\tau),\overline{\Lambda}(\tau)\Big)\,.$$

Свойства этих пределов описывают следующие, согласующиеся с теорией линейного программирования, теоремы.

Теорема 2.2.6. **На седловой траектории для пары линейных взаимодвойственных задач с ограниченными решениями вида** (1.2.1) **и** (1.2.2)**, имеют место равенства**

$$\lim_{\tau\to+0} \overline{\lambda}_i(\tau)\, f_i\big(\overline{X}(\tau)\big) = 0 \qquad i = \overline{1,m}\,,$$

$$\lim_{\tau\to+0} \overline{x}_j(\tau)\, g_j\big(\overline{\Lambda}(\tau)\big) = 0 \qquad j = \overline{1,n}\,,$$

$$\lim_{\tau\to+0} \Big(F(\overline{X}(\tau)) - G(\overline{\Lambda}(\tau))\Big) = 0\,.$$

Теорема 2.2.7. **На седловых траекториях для пары задач** (1.2.1) **и** (1.2.2)

$$\lim_{\tau\to+0} U\Big(\tau, \overline{X}(\tau), \overline{\Lambda}(\tau)\Big) = F\left(X^*\right) = G\left(\Lambda^*\right), \quad (2.2.21)$$

а в случае единственности решений пары задач (1.2.1) **и** (1.2.2) **справедливы также равенства**

$$\lim_{\tau\to+0} \overline{X}(\tau) = X^* \quad \textbf{и} \quad \lim_{\tau\to+0} \overline{\Lambda}(\tau) = \Lambda^*\,. \quad (2.2.22)$$

Отметим также, что существование и единственность седловой точки позволяет использовать U-функцию для устранения неоднозначности решений в задачах линейного программирования.

В заключение приведем примеры решения методом функций обратных связей взаимодвойственных пар задач линейного программирования с различными типами решений.

Из теории известно [1, 9], что возможны только три следующих случая:

1°. Обе задачи пвры имеют ограниченное решение.

2°. Одна из задач несовместна, а другая имеет неограниченное решение.

3°. Обе задачи несовместны.

Рассмотренные в § 1.2 задачи 1.2.1 и 1.2.2 иллюстрируют случай 1° Для остальных случаев используем функцию обратных связей опять же вида $Q(\tau, s) = \tau\left(s - \dfrac{1}{s}\right) \quad s > 0$.

Случай 2° иллюстрирует

Задача 2.2.1. Для пары задач:

прямая задача*:*
максимизировать в E^2 *функцию* $F(x) = 2x_1$,
при условиях
$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ *и*
$-x_1 + x_2 \leq 1$;

двойственная задача*:*
минимизировать в E^2 *функцию* $G(\Lambda) = \lambda$,
при условиях $\lambda \geq 0$ *и*
$-\lambda \geq 2$; $\lambda \geq 0$.

Для прямой задачи значение x_1 может быть сколь угодно большим по модулю. Двойственная задача здесь несовместна.

Система (1.2.7) для этого случая имеет вид

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2 + \overline{\lambda} & = & -\tau\left(\overline{x}_1 - \dfrac{1}{\overline{x}_1}\right), \\ -\overline{\lambda} & = & -\tau\left(\overline{x}_2 - \dfrac{1}{\overline{x}_2}\right), \\ 1 + \overline{x}_1 - \overline{x}_2 & = & \tau\left(\overline{\lambda} - \dfrac{1}{\overline{\lambda}}\right). \end{array}\right. \tag{2.2.25}$$

Ее решения для различных значений параметра τ приведены в табл. 2.2.1a и табл. 2.2.1b. При этом для краткости использованы обозначения:

$$\begin{aligned} F_\tau &= 2\overline{x}_1\,, \\ f_\tau &= 1-\overline{x}_1+\overline{x}_2\,, \\ G_\tau &= \overline{\lambda}\,, \\ g_{1\tau} &= 2+\overline{\lambda}\,, \\ g_{2\tau} &= -\overline{\lambda}\,. \end{aligned}$$

Таблица 2.2.1a.
Решения системы (2.2.25) для задачи 2.2.1

τ	$\overline{x}_{1\tau}$	$\overline{x}_{2\tau}$	F_τ	f_τ
10^{-1}	9.604136568	10.594374945	19.208273137	-0.009761623
10^{-2}	99.510049126	100.509949374	199.020098251	-0.000099751
10^{-3}	999.501000499	1000.500999000	1999.002001000	-0.000001000
10^{-4}	9999.500100000	10000.500100000	19999.000200000	-0.000000010
10^{-5}	99999.500010000	100000.500000000	199999.000000000	0.000000000
10^{-6}	999999.500000000	1000000.500000000	1999999.000000000	0.000000000
10^{-7}	9999999.500000000	10000000.500000000	19999999.000000000	0.000000000
10^{-8}	99999999.500000000	100000000.500000000	199999999.000000000	0.000000000

Таблица 2.2.1b.
Решения системы (2.2.25) для задачи 2.2.1

τ	$\overline{\lambda}_\tau$	G_τ	$g_{1\tau}$	$g_{2\tau}$
10^{-1}	-1.049998523	-1.049998523	0.950001477	1.049998523
10^{-2}	-1.005000001	-1.005000001	0.994999999	1.005000001
10^{-3}	-1.000500000	-1.000500000	0.999500000	1.000500000
10^{-4}	-1.000050000	-1.000050000	0.999950000	1.000050000
10^{-5}	-1.000005000	-1.000005000	0.999995000	1.000005000
10^{-6}	-1.000000500	-1.000000500	0.999999500	1.000000500
10^{-7}	-1.000000050	-1.000000050	0.999999950	1.000000050
10^{-8}	-1.000000005	-1.000000005	0.999999995	1.000000005

Наконец, случай 3° иллюстрирует

Задача 2.2.2. Для пары задач: **прямая задача**:

максимизировать в E^2 *функцию* $F(x) = 2x_1 + 3x_2$,
при условиях
$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$ *и*
$x_1 - x_2 \leq 1\ ,\ \ -x_1 + x_2 \leq -5\ ;$

двойственная задача:
минимизировать в E^2 *функцию* $G(\lambda) = \lambda_1 - 5\lambda_2$,
при условиях $\lambda_1 \geq 0\ ,\ \lambda_2 \geq 0$ *и*
$\lambda_1 - \lambda_2 \geq 2\ ,\ \ -\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3\,.$

Здесь обе задачи несовместны. Ее решения для различных значений параметра τ приведены в табл. 2.2.2a и табл. 2.2.2b. Для краткости в этих таблицах используем обозначения:

$$\begin{aligned}
F_\tau &= 2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2\,,\\
f_{1\tau} &= -1 + \overline{x}_1 - \overline{x}_2\,,\\
f_{2\tau} &= 5 - \overline{x}_1 + \overline{x}_2\,,\\
G_\tau &= \overline{\lambda}_1 - 5\overline{\lambda}_2\,,\\
g_{1\tau} &= -2 + \overline{\lambda}_1 - \overline{\lambda}_2\,,\\
g_{2\tau} &= -3 - \overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2\,.
\end{aligned}$$

Таблица 2.2.2a.
Решения системы (2.2.26) для задачи 2.2.2

τ	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	F_τ	$f_{1\tau}$	$f_{2\tau}$
10^{-1}	26.523821049	23.556332339	123.716639117	1.967488710	2.032511290
10^{-2}	251.502712579	248.505287580	1248.521288000	1.997424999	2.002575001
10^{-3}	2501.500275000	2498.500525000	12498.502130000	1.999749250	2.000250750
10^{-4}	25001.500030000	24998.500050000	124998.500200000	1.999974993	2.000025007
10^{-5}	250001.500000000	249998.500000000	1249998.500000000	1.999997500	2.000002500
10^{-6}	2500001.500000000	2499998.500000000	12499998.500000000	1.999999750	2.000000250
10^{-7}	25000001.500000000	24999998.500000000	124999998.500000000	1.999999974	2.000000026
10^{-8}	250000001.500000000	250000001.500000000	1249999999.000000000	2.000000000	2.000000000

Система (1.2.7) для этого случая принимает вид

$$\begin{cases} 1+\overline{x}_1-\overline{x}_2 &= \tau\left(\overline{\lambda}_1-\dfrac{1}{\overline{\lambda}_1}\right), \\ 5-\overline{x}_1+\overline{x}_2 &= \tau\left(\overline{\lambda}_2-\dfrac{1}{\overline{\lambda}_2}\right), \\ -2+\overline{\lambda}_1-\overline{\lambda}_2 &= -\tau\left(\overline{x}_1-\dfrac{1}{\overline{x}_1}\right), \\ -3-\overline{\lambda}_1+\overline{\lambda}_2 &= -\tau\left(\overline{x}_2-\dfrac{1}{\overline{x}_2}\right). \end{cases} \tag{2.2.26}$$

Таблица 2.2.2b.
Решения системы (2.2.26) для задачи 2.2.2

τ	$\overline{\lambda}_1$	$\overline{\lambda}_2$	G_τ	$g_{1\tau}$	$g_{2\tau}$
10^{-1}	19.725582687	20.374194596	-82.145390291	-2.648611909	-2.351388091
10^{-2}	199.747506201	200.262493566	-801.564961628	-2.514987365	-2.485012635
10^{-3}	1999.749750000	2000.251250000	-8001.506500000	-2.501499875	-2.498500125
10^{-4}	19999.749980000	20000.250120000	-80001.500650000	-2.500149999	-2.499850001
10^{-5}	199999.750000000	200000.250000000	-800001.500100000	-2.500015000	-2.499985000
10^{-6}	1999999.750000000	2000000.250000000	-8000001.500000000	-2.500001500	-2.499998500
10^{-7}	19999999.750000000	20000000.250000000	-80000001.500000000	-2.500000149	-2.499999851
10^{-8}	199999999.700000000	200000000.300000000	-800000001.500000000	-2.500000030	-2.499999970