ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 10, с. 1681–1694

УДК 519.8

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

© 2019 г. А. Е. Умнов[1,*], Е. А. Умнов[1]

([1] 141700 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия)

*e-mail: mail@umnov.ru

Поступила в редакцию 25.03.2019 г.
Переработанный вариант 02.04.2019 г.
Принята к публикации 10.06.2019 г.

В статье рассматривается схема решения задач линейного программирования, основанная на использовании вспомогательных функций, реализующих обратную связь в системе условий для искомых переменных и множителей Лагранжа. Приводится обоснование предлагаемого подхода. Библ. 7. Фиг. 1. Табл. 3.

**Ключевые слова:** задача линейного программирования, метод штрафных функций, функции обратной связи, модифицированная функция Лагранжа, регуляризация.

**DOI:** 10.1134/S0044466919100144

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассматривается вариант метода асимптотических оценок для решения стандартной задачи линейного программирования вида максимизировать по $x \in E^n$ с координатным представлением $\|x\| = \|\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\|^{\mathrm{T}}$

$$\text{целевую функцию} \quad F(x) \tag{1.1}$$

$$\text{при условиях:} \quad \xi_j \geq 0 \quad \forall j = [1, n], \quad f_i(x) \leq 0 \quad \forall i = [1, m], \tag{1.2}$$

где каждая из функций $F(x)$, $f_i(x)$ $\forall i = [1, m]$ линейна по всем своим аргументам.

## 2. СХЕМА МЕТОДА ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Вначале рассмотрим использование предлагаемого подхода для решения пары взаимно двойственных задач линейного программирования, записанных в симметричной форме.

Пусть векторы $x \in E^n$ и $\Lambda \in E^m$, имеющие координатные столбцы вида $\|x\| = \|\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n\|^{\mathrm{T}}$ и $\|\Lambda\| = \|\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m\|^{\mathrm{T}}$, являются искомыми, соответственно, для равносильной задачи (1.1), (1.2) паре задач следующего вида.

1. *Прямой* задачи линейного программирования, т.е.

максимизировать по $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$функцию $F(x) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j$

$$\text{при условиях} \quad \xi_j \geq 0 \quad \forall j = [1, n], \quad \text{где} \quad f_i(x) = -\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \leq 0 \quad \forall i = [1, m]. \tag{2.1}$$

Любое решение задачи (2.1) обозначим как $x^*$, а $F(x^*)$ через $F^*$.

2. *Двойственной* задачи линейного программирования, т.е.

минимизировать по $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ функцию $G(\Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i$

$$\text{при условиях} \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = [1, m], \quad \text{где} \quad g_j(\Lambda) = -\sigma_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\lambda_i \geq 0 \quad \forall j = [1, n]. \tag{2.2}$$

Ее решение будем обозначать через $\Lambda^*$ и пусть $G^* = G(\Lambda^*)$.

Последующее изложение может быть упрощено, если вначале привести краткое описание схемы решения пары задач (2.1) и (2.2) следующим вариантом метода гладких штрафных функций [1].

Предположим, что в этом методе используются вспомогательные функции вида

$$\begin{gathered} A_{\mathrm{P}}(\tau, x) = F(x) - \sum_{i=1}^{m} P(\tau, f_i(x)) - \sum_{j=1}^{n} P(\tau, (-\xi_j)), \\ A_{\mathrm{D}}(\tau, \Lambda) = G(\Lambda) + \sum_{j=1}^{n} P(\tau, -g_j(\Lambda)) + \sum_{i=1}^{m} P(\tau, (-\lambda_i)), \end{gathered} \tag{2.3}$$

где функция $P(\tau, s)$ определяет “штраф” за нарушение ограничения $s \leq 0$ и удовлетворяет следующим условиям.

1. $\forall s$ и $\forall \tau > 0$: $P(\tau, s) \geq 0$ и $\lim\limits_{\tau \to +0} P(\tau, s) \begin{cases} +\infty, & s > 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$

2. Функция $P(\tau, s)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам до второго порядка включительно. (2.4)

3. Для всех $\tau > 0$ и $\forall s$ выполнены неравенства $\dfrac{\partial P}{\partial s} > 0$; $\dfrac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0$.

Пусть

$$\operatorname*{grad}_x A_{\mathrm{P}}(\tau, \tilde{x}(\tau)) = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname*{grad}_\Lambda A_{\mathrm{D}}(\tau, \breve{\Lambda}(\tau)) = 0. \tag{2.5}$$

Тогда величины $F(\tilde{x}(\tau))$ и $G(\breve{\Lambda}(\tau))$, где точки $\tilde{x}(\tau)$ и $\breve{\Lambda}(\tau)$ являются стационарными для вспомогательных функций (2.3) $\forall \tau > 0$, и, в силу основного свойства метода штрафных функций, их можно использовать в качестве аппроксимаций значений $F(x^*)$ и $G(\Lambda^*)$. Кроме того, к условиям стационарности функций (2.5): применима теорема о неявных функциях (например, теорема 2 § 41 из [2]), в силу чего вектор-функции $\bar{x}(\tau)$ и $\breve{\Lambda}(\tau)$ могут рассматриваться как неявно определяемые уравнениями (2.5).

Наконец, в регулярном случае (т.е. в случае однозначной разрешимости пары задач (2.1), (2.2)) $\tilde{x}(\tau)$ может служить аппроксимацией $x^*$ и соответственно $\breve{\Lambda}(\tau)$ – аппроксимацией для $\Lambda^*$. И, как показано, например в [3], при этом оказываются справедливыми равенства

$$\lambda_i^* = \lim_{\tau \to +0} \frac{\partial P}{\partial f_i}(\tau, f_i(\tilde{x}(\tau))) \quad \forall i = [1, m], \quad \xi_j^* = \lim_{\tau \to +0} \frac{\partial P}{\partial g_j}(\tau, -g_j(\breve{\Lambda}(\tau))) \quad \forall j = [1, n].$$

Приступим теперь к описанию предлагаемого подхода, используя соображения, изложенные в [4].

Как известно, по свойству взаимодвойственных задач (2.1), (2.2) компоненты вектора $x^*$ являются множителями Лагранжа для задачи (2.2), а компоненты вектора $\Lambda^*$ суть множители Лагранжа в задаче (2.1). Однако при каждом фиксированном $\tau > 0$, вообще говоря, имеем

$$\frac{\partial P}{\partial f_i}(\tau, f_i(\tilde{x}(\tau))) \neq \breve{\lambda}_i(\tau)) \quad \forall i = [1, m] \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial g_j}(\tau, -g_j(\breve{\Lambda}(\tau))) \neq \tilde{\xi}_j(\tau)) \quad \forall j = [1, n].$$

Эти соотношения оказываются верными равенствами лишь в пределе при $\tau \to +0$.

Здесь можно предположить, что найдется $\tau_0 > 0$, для которого будут существовать вектор-функции $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$, являющиеся $\forall\tau \in (0, \tau_0]$ решениями системы уравнений вида

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i(\tau) &= \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) \quad \forall i = [1, m], \\ \bar{\xi}_j(\tau) &= \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\bar{\Lambda}(\tau))) \quad \forall j = [1, n], \end{aligned} \tag{2.6}$$

для которых (в случае совместности задач (2.1), (2.2)) верны соотношения: $\lim\limits_{\tau\to+0} F(\bar{x}(\tau)) = F^*$ и $\lim\limits_{\tau\to+0} G(\bar{\Lambda}(\tau)) = G^*$, а в регулярном случае (т.е. при единственности $x^*$ и $\Lambda^*$), кроме того, и равенства:

$$\lambda_i^* = \lim_{\tau\to+0} \frac{\partial P}{\partial f_i}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) \quad \forall i = [1, m], \quad \xi_j^* = \lim_{\tau\to+0} \frac{\partial P}{\partial g_j}(\tau, -g_j(\bar{\Lambda}(\tau))) \quad \forall j = [1, n].$$

Тогда вектор-функции $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$, наряду с $\tilde{x}(\tau)$ и $\breve{\Lambda}(\tau)$, можно было бы использовать в качестве оценочных аппроксимаций решений задач (2.1) и (2.2).

Заметим, что система (2.6) также может быть записана в виде

$$\begin{aligned} f_i(\tau, \bar{x}(\tau)) &= Q(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) \quad \forall i = [1, m], \\ -g_j(\tau, \bar{\Lambda}(\tau)) &= Q(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) \quad \forall j = [1, n] \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} -\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\bar{\xi}_j &= Q(\tau, \bar{\lambda}_i) \quad \forall i = [1, m], \\ -\sigma_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\bar{\lambda}_i &= -Q(\tau, \bar{\xi}_j) \quad \forall j = [1, n], \end{aligned} \tag{2.7}$$

где функция $Q(\tau, s) = \operatorname{inv}\left(\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)\right)$ есть обратная к функции $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$.

Возможную истинность сделанного предположения подтверждает следующий

**Пример 1.** Для пары задач с параметром $v$:

*прямая* задача: максимизировать в $E^2$ функцию $F(x) = 2\xi_1 + 3\xi_2$,

при условиях $\xi_1 \ge 0$, $\xi_2 \ge 0$ и $\xi_1 + 2\xi_2 \le v$, $2\xi_1 + \xi_2 \le 6$;

*двойственная* задача: минимизировать в $E^2$ функцию $G(\Lambda) = v\lambda_1 + 6\lambda_2$,

при условиях $\lambda_1 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$ и $\lambda_1 + 2\lambda_2 \ge 2$, $2\lambda_1 + \lambda_2 \ge 3$.

Пусть значение $v = 6$, тогда решения имеют вид $\xi_1^* = 2$, $\xi_2^* = 2$, $F^* = 10$ и $\lambda_1^* = \frac{4}{3}$, $\lambda_2^* = \frac{1}{3}$, $G^* = 10$.

Если использовать $P(\tau, s) = \tau \exp\left(\frac{s}{\tau}\right)$ и соответствующую ей $Q(\tau, s) = \operatorname{inv}\left(\exp\left(\frac{s}{\tau}\right)\right) = \tau \ln s$, то система (2.7) будет иметь вид

$$\begin{aligned} -6 + \bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 &= \tau \ln \bar{\lambda}_1, \\ -6 + 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 &= \tau \ln \bar{\lambda}_2, \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 &= -\tau \ln \bar{\xi}_1, \\ -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 &= -\tau \ln \bar{\xi}_2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

решения которой для различных значений параметра $\tau$ приведены в табл. 1.

В последующих разделах статьи рассматриваются условия применимости методов, основанных на решении систем подобных (2.7). Здесь же отметим, что из структуры этой системы следует, что $Q(\tau, s)$ по сути является функцией, реализующей обратную связь в наборе ограничений для прямых и двойственных переменных в задачах (2.1) и (2.2). Поэтому далее (для краткости) будет употребляться термин *обратная связь* при ссылках как на сами функции типа $Q(\tau, s)$, так и на методы решения задачи (1.1), (1.2), использующих эти функции.

**Таблица 1.** Решения системы (2.8) для примера 1 с параметром $v = 6$

| $\tau$ | $\bar{\xi}_1(\tau)$ | $\bar{\xi}_2(\tau)$ | $F(\bar{x}(\tau))$ | $\bar{\lambda}_1(\tau)$ | $\bar{\lambda}_2(\tau)$ | $G(\bar{\Lambda}(\tau))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^{-1}$ | 1.91387303 | 2.05644660 | 9.99708585 | 1.30690566 | 0.31409072 | 9.72597830 |
| $10^{-2}$ | 1.99167722 | 2.00559101 | 10.0001275 | 1.33099033 | 0.33105995 | 9.97230168 |
| $10^{-3}$ | 1.99917130 | 2.00055811 | 10.0000169 | 1.33310196 | 0.33310265 | 9.99722768 |
| $10^{-4}$ | 1.99991717 | 2.00005580 | 10.0000017 | 1.33331023 | 0.33331023 | 9.99972274 |
| $10^{-5}$ | 1.99999172 | 2.00000558 | 10.0000002 | 1.33333102 | 0.33333102 | 9.99997227 |
| $10^{-6}$ | 1.99999917 | 2.00000056 | 10.0000000 | 1.33333310 | 0.33333102 | 9.99999723 |

## 3. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Определим функцию $P(\tau, s)$ так, чтобы для нее выполнялись все условия пп. 1–3 из (2.4). Тогда непрерывно дифференцируемая функция $\frac{\partial P}{\partial s}$ монотонно возрастает по $s$ $\forall s$ и имеет непрерывно дифференцируемую обратную функцию $Q(\tau, s)$, которая, в свою очередь, монотонно возрастает по $s$ $\forall s > 0$. Кроме того, для нее имеем $\lim\limits_{s \to +0} Q(\tau, s) = -\infty$ $\forall \tau > 0$, $\lim\limits_{s \to +\infty} Q(\tau, s) = +\infty$ $\forall \tau > 0$ и $\lim\limits_{\tau \to +0} Q(\tau, s) = 0$ $\forall s > 0$.

Через $R(\tau, s)$ обозначим неотрицательную, имеющую единственный ноль функцию, для которой справедливо равенство

$$\frac{\partial R}{\partial s} = Q(\tau, s). \tag{3.1}$$

Заметим, что в сделанных предположениях функция $R(\tau, s)$ существует и единственна.

Введем в рассмотрение вспомогательную (называемую далее для краткости $U$-функцией) функцию вида

$$U(\tau, x, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n} (\sigma_j \xi_j - R(\tau, \xi_j)) + \sum_{i=1}^{m} (\beta_i \lambda_i + R(\tau, \lambda_i)) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \xi_j \lambda_i. \tag{3.2}$$

Заметим, что в этом случае решения системы (2.7) (если они существуют) – векторы $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ – суть стационарные точки $U$-функции по совокупности переменных $\{x; \Lambda\}$.

**Теорема 3.1.** *Функция $U(\tau, x, \Lambda)$ строго выпукла вверх по $x$ и строго выпукла вниз по $\Lambda$ в любой конечной точке с положительными координатами в пространстве $E^n \otimes E^m$ $\forall \tau > 0$.*

**Доказательство.** Из соотношений (3.2) и (2.7) находим, что компоненты матрицы Гессе для $U(\tau, x, \Lambda)$ (как функции от $x$ при фиксированных $\tau$ и $\Lambda$) имеют вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_j \partial \xi_k} = \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} \delta_{jk} \qquad \forall j, k = [1, n]$$

(где $\delta_{jk}$ – символ Кронекера). Тогда ее главные миноры вида

$$\det \begin{Vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1 \partial \xi_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_k \partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_k^2} \end{Vmatrix} = \prod_{j=1}^{k} \left( -\frac{\partial Q}{\partial \xi_j} \right) \qquad \forall k = [1, n].$$

Числа $\dfrac{\partial Q}{\partial \xi_j}$ положительные, так как в силу соотношения между производными взаимно обратных функций и условия п. 3 из (2.4)

$$\frac{\partial Q}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}\right)^{-1} > 0. \tag{3.3}$$

Таким образом, в рассматриваемой подматрице Гессе все главные миноры нечетного порядка отрицательны, четного – положительны, и, согласно критерию Сильвестра, матрица Гессе функции $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам $x$ отрицательно определена. Поэтому функция $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам $x$ строго выпукла вверх.

Рассуждая аналогично, для подматрицы Гессе функции $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам $\Lambda$ получаем, что значения ее главных миноров равны $\prod_{i=1}^{k}\dfrac{\partial Q}{\partial \lambda_i}$ $\forall k = [1, m]$. В силу (3.3) эти значения положительны. Тогда, согласно критерию Сильвестра, подматрица Гессе функции $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам $\Lambda$ положительно определена, а сама функция $U(\tau, x, \Lambda)$ по компонентам $\Lambda$ является строго выпуклой вниз при любых фиксированных $\tau$ и $x$.

Докажем теперь совместность системы (2.7).

**Теорема 3.2.** *Система уравнений* (2.7) *имеет единственное решение с положительными компонентами при любом фиксированном* $\tau > 0$ *для любой пары задач* (2.1), (2.2).

**Доказательство.** 1. Для каждого вектора $\Lambda$ с конечными положительными компонентами существует единственный конечный вектор $\hat{x}(\Lambda)$ с положительными компонентами такой, что верно равенство $\operatorname{grad}_x U(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda) = 0$, имеющее в силу (3.2) вид

$$Q(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda)) - \sigma_j + \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\lambda_i = 0 \quad \forall j = [1, n], \tag{3.4}$$

поскольку функция $U(\tau, x, \Lambda)$ строго выпукла вверх по $x$, а условия (3.4) равносильны равенствам

$$\hat{\xi}_j(\Lambda) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\Lambda)) \quad \forall j = [1, n], \quad \forall \Lambda > 0,$$

в которых правые части существуют, положительны и определены однозначно. Это, в свою очередь, означает, что $\hat{x}(\Lambda) = \operatorname{argmax}_x U(\tau, x, \Lambda)$.

Рассуждая аналогично, заключаем, что для каждого конечного вектора $x$ с положительными компонентами будет существовать конечный вектор $\hat{\Lambda}(x)$ с положительными компонентами такой, что

$$Q(\tau, \hat{\lambda}_i(x)) + \beta_i - \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j = 0 \quad \forall i = [1, m] \tag{3.5}$$

и что $\hat{\Lambda}(x) = \operatorname{argmin}_{\Lambda} U(\tau, x, \Lambda)$ в силу строгой выпуклости $U(\tau, x, \Lambda)$ вниз по $\Lambda$.

2. Теперь найдем минимум $U(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda)$ по $\Lambda$. Из формулы (3.2) мы получаем

$$U(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda) = \sum_{j=1}^{n}(\sigma_j\hat{\xi}_j(\Lambda) - R(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda))) + \sum_{i=1}^{m}(\beta_i\lambda_i + R(\tau, \lambda_i)) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\hat{\xi}_j(\Lambda)\lambda_i.$$

В силу строгой выпуклости вниз этой функции, достаточное условие ее минимума будет

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_q}(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda) = \sum_{j=1}^{n}\left[\sigma_j\frac{\partial \hat{\xi}_j(\Lambda)}{\partial \lambda_q} - \frac{\partial R}{\partial s}(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda))\frac{\partial \hat{\xi}_j(\Lambda)}{\partial \lambda_q}\right] +$$
$$+ \beta_q + \frac{\partial R}{\partial s}(\tau, \lambda_q) - \sum_{j=1}^{n}\alpha_{qj}\hat{\xi}_j(\Lambda) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{qj}\lambda_i\frac{\partial \hat{\xi}_j(\Lambda)}{\partial \lambda_q} = 0 \quad \forall q = [1, m]$$

или, после перегруппировки слагаемых,

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\hat{\xi}_j(\Lambda)}{\partial\lambda_q}\left[\sigma_j - Q(\tau,\hat{\xi}_j(\Lambda)) - \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\lambda_i\right] + \beta_q + Q(\tau,\lambda_q) - \sum_{j=1}^{n}\alpha_{qj}\hat{\xi}_j(\Lambda) = 0 \quad \forall q = [1,m], \tag{3.6}$$

поскольку $\forall j = [1,n]$ и $\forall q = [1,m]$

$$\frac{\partial R}{\partial s}(\tau,\hat{\xi}_j(\Lambda)) = Q(\tau,\hat{\xi}_j(\Lambda)) \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial s}(\tau,\lambda_q) = Q(\tau,\lambda_q).$$

Тогда, за счет использования (3.4), равенство (3.6) – достаточное условие минимума функции $U(\tau,\hat{x}(\Lambda),\Lambda)$ по $\Lambda$ – может быть упрощено до

$$\beta_q + Q(\tau,\hat{\hat{\lambda}}_q) - \sum_{j=1}^{n}\alpha_{qj}\hat{\xi}_j(\hat{\hat{\Lambda}}) = 0 \quad \forall q = [1,m], \tag{3.7}$$

где вектор с неотрицательными компонентами $\hat{\hat{\Lambda}} = \underset{\Lambda}{\operatorname{argmin}}\, U(\tau,\hat{x}(\Lambda),\Lambda)$, для которого верно равенство $\min\limits_{\Lambda}\max\limits_{x} U(\tau,x,\Lambda) = U(\tau,\hat{x}(\Lambda),\hat{\hat{\Lambda}})$ и такого, что $\left\|\hat{\hat{\Lambda}}\right\| = \left\|\hat{\hat{\lambda}}_1\hat{\hat{\lambda}}_2\ldots\hat{\hat{\lambda}}_m\right\|^{\mathrm{T}}$, существует и единственен в силу строгой выпуклости вниз по $\Lambda$ функции $U(\tau,x,\Lambda)$.

Найдем теперь значение минимума по $\Lambda$ для функции $U(\tau,\hat{x}(\Lambda),\Lambda)$. Имеем

$$U(\tau,\hat{x}(\hat{\hat{\Lambda}}),\hat{\hat{\Lambda}}) = \sum_{j=1}^{n}(\sigma_j\hat{\xi}_j(\hat{\hat{\Lambda}}) - R(\tau,\hat{\xi}_j(\hat{\hat{\Lambda}}))) + \sum_{i=1}^{m}(\beta_i\hat{\hat{\lambda}}_i + R(\tau,\hat{\hat{\lambda}}_i)) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\hat{\xi}_j(\hat{\hat{\Lambda}})\hat{\hat{\lambda}}_i.$$

Перегруппировав слагаемые, имеем, что

$$U(\tau,\hat{x}(\hat{\hat{\Lambda}}),\hat{\hat{\Lambda}}) = \sum_{i=1}^{m}(\beta_i\hat{\hat{\lambda}}_i + R(\tau,\hat{\hat{\lambda}}_i)) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sigma_j - \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\hat{\hat{\lambda}}_i\right)\hat{\xi}_j(\hat{\hat{\Lambda}}) - \sum_{j=1}^{n}R(\tau,\hat{\xi}_j(\hat{\hat{\Lambda}})).$$

Наконец, в силу (3.4), получим

$$U(\tau,\hat{x}(\hat{\hat{\Lambda}}),\hat{\hat{\Lambda}})\min_{\Lambda}\max_{x}U(\tau,x,\Lambda)\sum_{i=1}^{m}(\beta_i\hat{\hat{\lambda}}_i + R(\tau,\hat{\hat{\lambda}}_i)) + \sum_{j=1}^{n}(\hat{\xi}_j(\hat{\hat{\Lambda}})Q(\tau,\hat{\xi}_j(\hat{\hat{\Lambda}})) - R(\tau,\hat{\xi}_j(\hat{\hat{\Lambda}})). \tag{3.8}$$

3. Теперь рассуждениями, аналогичными п. 2, найдем $\max\limits_{x}\min\limits_{\Lambda} U(\tau,x,\Lambda)$.

Поскольку функция $U(\tau,x,\Lambda)$ строго выпукла вниз по совокупности компонент вектора $\Lambda$, то достаточное условие ее минимума по $\Lambda$ будет

$$-Q(\tau,\hat{\lambda}_i(x)) = \beta_i - \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j \quad \forall i = [1,m]. \tag{3.9}$$

Значение минимума функции $U(\tau,x,\Lambda)$ по $\Lambda$ при фиксированных $\tau$ и $x$ равно

$$U(\tau,x,\hat{\Lambda}(x)) = \sum_{j=1}^{n}(\sigma_j\xi_j - R(\tau,\xi_j))) + \sum_{i=1}^{m}(\beta_i\hat{\lambda}_i(x) + R(\tau,\hat{\lambda}_i(x))) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\xi_j\hat{\lambda}_i(x).$$

В силу строгой выпуклости вверх этой функции по $x$, достаточное условие ее максимума по $x$ (после перегруппировки слагаемых) есть

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\hat{\lambda}_i(x)}{\partial\xi_k}\left[\beta_i + Q(\tau,\hat{\lambda}_i(x)) - \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j\right] + \sigma_k - Q(\tau,\xi_k) - \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ik}\hat{\lambda}_i(x) = 0 \quad \forall k = [1,n]. \tag{3.10}$$

Выражения, стоящие в квадратных скобках в (3.10), равны нулю в силу (3.9) и, следовательно, достаточное условие максимума $U(\tau,x,\hat{\Lambda}(x))$ по $x$ принимает вид

$$\sigma_k - Q(\tau,\hat{\hat{\xi}}_k) - \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ik}\hat{\lambda}_i(\hat{\hat{\xi}}_k) = 0 \quad \forall k = [1,n], \tag{3.11}$$

где вектор с неотрицательными компонентами $\hat{\hat{x}} = \underset{x}{\operatorname{argmax}}\, U(\tau, x, \hat{\Lambda}(x))$, для которого верно равенство $\max\limits_{x} \min\limits_{\Lambda} U(\tau, x, \Lambda) = U(\tau, \hat{\hat{x}}, \hat{\Lambda}(x))$, существует и единственен в силу строгой выпуклости вверх по $x$ функции $U(\tau, x, \Lambda)$.

Для значения максимума функции $U(\tau, x, \hat{\Lambda}(x))$ по $x$ (после перегруппировки слагаемых и учета (3.11) в итоге имеем

$$U(\tau, \hat{\hat{x}}, \hat{\Lambda}(\hat{\hat{x}})) \max_{x} \min_{\Lambda} U(\tau, x, \Lambda) \sum_{i=1}^{m} (\beta_i \hat{\lambda}_i(\hat{\hat{x}}) + R(\tau, \hat{\lambda}_i(\hat{\hat{x}}))) + \sum_{j=1}^{n} (\hat{\hat{\xi}}_j Q(\tau, \hat{\hat{\xi}}_j) - R(\tau, \hat{\hat{\xi}}_j)). \tag{3.12}$$

4. Теперь заметим, что из условий (3.7) и (3.9) следует равенство $\hat{\hat{\Lambda}} = \hat{\Lambda}(\hat{\hat{x}})$, а из условий (3.4) и (3.11) следует соответственно $\hat{\hat{x}} = \hat{x}(\hat{\hat{\Lambda}})$, поскольку условие (3.7) является достаточным условием максимума функции $U(\tau, x, \widehat{\Lambda}(x))$ по $x$, а условие (3.11) – соответственно достаточным условием минимума функции $U(\tau, \hat{x}(\Lambda), \Lambda)$ по $\Lambda$.

Поясним эти утверждения, получив, к примеру, формулу $\hat{\hat{x}} = \hat{x}(\hat{\hat{\Lambda}})$. Для этого перепишем равенства (3.4) и (3.11), переобозначив в последнем индекс $k$ на $j$.

$$\begin{gathered} -Q(\tau, \hat{\xi}_j(\Lambda)) = -\sigma_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \lambda_i \quad \forall j = [1, n], \\ -Q(\tau, \hat{\hat{\xi}}_j) = -\sigma_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \hat{\lambda}_i(\hat{\hat{\xi}}_j) \quad \forall j = [1, n]. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Первая группа равенств (3.13) выполняется при любых положительных $\lambda_i \forall i = [1, m]$, в том числе и при $\hat{\lambda}_i(\hat{\hat{\xi}}_j) \forall i = [1, m]$. Очевидно, что в этом случае правые части равенств оказываются одинаковыми. Но тогда будут равны и левые, т.е.

$$Q(\tau, \hat{\xi}_j(\hat{\hat{\Lambda}})) = Q(\tau, \hat{\hat{\xi}}_j) \quad \forall j = [1, n].$$

Последнее же равенство означает, что, в силу монотонности по $s$ функции $Q(\tau, s)$, будут верны равенства $\hat{\xi}_j(\hat{\hat{\Lambda}}) = \hat{\hat{\xi}}_j \ \forall j = [1, n]$, т.е., $\hat{\hat{x}} = \hat{x}(\hat{\hat{\Lambda}})$.

Из сопоставления формул (3.8) и (3.12) получаем, что

$$\min_{\Lambda} \max_{x} U(\tau, x, \Lambda) = \max_{x} \min_{\Lambda} U(\tau, x, \Lambda).$$

Это означает, что функция $U(\tau, x, \Lambda)$ имеет седловую точку, которая, в силу непрерывной дифференцируемости $U(\tau, x, \Lambda)$, является для нее стационарной. Условия же стационарности можно записать в виде

$$\begin{gathered} \underset{x}{\operatorname{grad}}\, U = 0, \\ \underset{\Lambda}{\operatorname{grad}}\, U = 0, \end{gathered}$$

равносильном в своей совокупности системе (2.7), что доказывает утверждение теоремы.

В дальнейшем (если не оговорено противное) мы будем предполагать, что функция $P(\tau, s)$ не только удовлетворяет условиям (2.4), но и что $\dfrac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$ является функцией одного аргумента $u = \dfrac{s}{\tau}$, т.е.

$$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s) = \Phi\left(\frac{s}{\tau}\right), \tag{3.14}$$

где $\Phi(u)$ – определенная $\forall u$ функция, обеспечивающая выполнение условий (2.4).

Условие (3.14) формально является дополнительным ограничением общности при выборе вида функции $P(\tau, s)$, не играющим существенного практического значения в силу инструментальной роли самой функции $P(\tau, s)$, однако, позволяющим не только упростить обоснование метода обратных связей, но и, как показано в [5], улучшить характеристики его сходимости при $\tau \to +0$.

Рассмотрим теперь свойства функции $R(\tau, s)$. Эта функция очевидно определена при любых положительных $\tau$ и $s$, в своей области определения неотрицательна и имеет единственный ноль, а также дважды непрерывно дифференцируема и строго выпукла вниз по $s$ на $s > 0$. Кроме того, важное для дальнейшего свойство функции $R(\tau, s)$ описывает

**Теорема 3.3.** *Для любого фиксированного* $s \in (0, +\infty)$ *имеем* $\lim\limits_{\tau \to +0} R(\tau, s) = 0$.

**Доказательство.** В силу (3.14) функция обратной связи $Q(\tau, s)$ определяется соотношением $\Phi\left(\dfrac{Q}{\tau}\right) = s$ и имеет вид $Q(\tau, s) = \tau\Psi(s)$, где $\Psi(u)$ есть функция, определенная на интервале $(0, +\infty)$, обратная к $\Phi(u)$.

Тогда при любом конечном положительном $s$ из

$$R(\tau, s) = \int_a^s Q(\tau, u)du = \tau\int_a^s \Psi(u)du, \quad \text{где} \quad Q(\tau, a) = 0,$$

следует справедливость утверждения теоремы.

Другое полезное свойство $U$-функции описывает

**Теорема 3.4.** *Если* $L(x, \Lambda)$ *— функция Лагранжа пары задач* (2.1) *и* (2.2)*, то* $\forall x$ *и* $\forall \Lambda$ *из области определения* $L(x, \Lambda)$

$$\lim_{\tau \to +0} U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda). \tag{3.15}$$

**Доказательство.** Функция Лагранжа задач (2.1) и (2.2) имеет вид

$$L(x, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(-\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j\right) \quad \text{или} \quad L(x, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \lambda_i.$$

Поэтому $U$-функцию можно записать как

$$U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda) - \sum_{j=1}^{n} R(\tau, \xi_j) + \sum_{i=1}^{m} R(\tau, \lambda_i). \tag{3.16}$$

Применяя к формуле (3.16) утверждение теоремы 3.3, получаем утверждение доказываемой теоремы.

Дадим следующее

**Определение.** Совокупность точек пространства $E^n \otimes E^m$ вида $\{\bar{x}(\tau); \bar{\Lambda}(\tau)\}$ $\forall \tau > 0$ — назовем *седловой* траекторией $U$-функции пары задач (2.1) и (2.2).

Из теоремы 3.2 следует, что на каждой седловой траектории определены вектор-функции $\bar{x}(\tau)$, $\bar{\Lambda}(\tau)$, а также скалярная функция $\bar{U}(\tau) = U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau))$. Рассмотрим их свойства.

**Теорема 3.5.** *Для собственных задач* (2.1) *и* (2.2)*, т.е. задач, имеющих ограниченные оптимальные значения целевых функций, вектор-функции* $\bar{x}(\tau)$ *и* $\bar{\Lambda}(\tau)$ *имеют ограниченные компоненты на множестве* $\forall \tau > 0$.

**Доказательство.** 1. Исходя из (2.6) и использовав (2.1)–(2.2), условия стационарности вспомогательной $U$-функции (3.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i(\tau) &= \frac{\partial P}{\partial s}\left(\tau, -\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{\partial P}{\partial s}\left(\tau, \sigma_j - \sum_{q=1}^{m} \alpha_{qj} \bar{\lambda}_q(\tau)\right)\right) \quad \forall i = [1, m], \\ \bar{\xi}_j(\tau) &= \frac{\partial P}{\partial s}\left(\tau, \sigma_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \frac{\partial P}{\partial s}\left(\tau, -\beta_i + \sum_{p=1}^{n} \alpha_{ip} \bar{\xi}_p(\tau)\right)\right) \quad \forall j = [1, n], \end{aligned} \tag{3.17}$$

т.е. система (2.7) распадается на две независимые подсистемы, неизвестными в первой из которых являются компоненты вектор-функции $\bar{\Lambda}(\tau)$, а во второй — компоненты $\bar{x}(\tau)$.

Исследуем подробно вторую из них, введя для удобства следующие скалярные функции:

$$W_j(\tau,\overline{x}(\tau)) = \sigma_j - \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\frac{\partial P}{\partial s}(\tau,V_i(\overline{x}(\tau))) \quad \forall j=[1,n] \quad \text{и} \quad V_i(\overline{x}(\tau)) - \beta_i + \sum_{p=1}^{n}\alpha_{ip}\overline{\xi}_p(\tau) \quad \forall i=[1,m].$$

В этом случае вторая группа уравнений в (3.17) принимает вид системы равенств

$$\overline{\xi}_j(\tau) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau,W_j(\tau,\overline{x}(\tau))) \quad \forall j=[1,n], \tag{3.18}$$

а частная производная от функции $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau,W_j(\tau,x))$ по $\xi_k$ будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{\partial P}{\partial s}(\tau,W_j(\tau,x)) = \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau,W_j(\tau,x))\frac{\partial W_j}{\partial\xi_k} = \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau,W_j(\tau,x))\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(\sigma_j - \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ik}\frac{\partial P}{\partial s}(\tau,V_i(\tau,x))\right) =$$
$$= -\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau,W_j(\tau,x))\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ik}\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau,x)\frac{\partial V_i}{\partial\xi_k}\right) = -\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau,W_j(\tau,x))\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ik}\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau,x)\alpha_{ik}\right).$$

Откуда, принимая во внимание, что в силу (2.4) вторая производная $\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau,s)$ определена и строго положительна $\forall s$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{\partial P}{\partial s}(\tau,W_j(\tau,x)) = -\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau,W_j(\tau,x))\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ik}^2\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau,x)\right) \le 0,$$

причем в случае $\sum_{i=1}^{m}|\alpha_{ik}| > 0$ это неравенство будет строгим.

Таким образом, правая часть $j$-го уравнения в системе (3.18) есть монотонно убывающая функция $k$-й компоненты вектора $\overline{x}(\tau)$.

2. Рассмотрим теперь $j$-е уравнение в системе (3.18), в котором зафиксированы все неизвестные, кроме $\overline{\xi}_j$. Пусть оно имеет вид $\overline{\xi}_j = Z(\overline{\xi}_j)$. Заметим, что как область определения функции $Z(\overline{\xi}_j)$, так и область ее значений есть множество положительных чисел. При этом из п. 1 следует, что на всей области определения непрерывная функция $Z(\overline{\xi}_j)$ монотонно убывающая. Тогда для нее существует монотонно убывающая обратная функция $T(\overline{\xi}_j)$.

Пусть $\overline{\xi}_j^*$ – решение рассматриваемого уравнения, т.е. $\overline{\xi}_j^* = Z(\overline{\xi}_j^*)$. Очевидно, что и $T(\overline{\xi}_j^*) = \overline{\xi}_j^*$. Если $\overline{\xi}_j^*$ ограничено сверху, то $\exists +\infty > D_j > 0:\ \overline{\xi}_j^* \le D_j$, а значит, и $\overline{\xi}_j^* = T(\overline{\xi}_j^*) = Z(\overline{\xi}_j^*) \le D_j$. Тогда в силу монотонного убывания функции $T(\overline{\xi}_j)$ получаем $T(Z(\overline{\xi}_j^*)) \ge T(D_j)$. Иначе говоря, $\exists d_j > 0:\ d_j \le \overline{\xi}_j^*$, где $d_j = T(D_j) \le D_j$. Следовательно, $\overline{\xi}_j^*$ ограничена и снизу, причем строго положительной величиной.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что из ограниченности снизу компоненты $\overline{\xi}_j^*$ следует ее ограниченность и сверху.

3. Покажем теперь, что в собственном случае решения системы (3.17) ограничены $\forall\tau > 0$ и имеют неограниченные компоненты в случае несобственном.

Действительно, если решения задач (2.1), (2.2) существуют и конечны, то системы

$$\begin{matrix} \sigma_j - \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\lambda_i \le 0 \quad \forall j=[1,n], \\ \lambda_i \ge 0 \quad \forall i=[1,m] \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} -\beta_i + \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j \le 0 \quad \forall i=[1,m], \\ \xi_j \ge 0 \quad \forall j=[1,n] \end{matrix} \tag{3.19}$$

совместны.

Рассмотрим вторую из них. В этом случае для каждого $j=[1,n]$ найдется вектор $x_{(j)}$ такой, что $W_j(\tau,x_{(j)}) = 0$. Заметим, что каждая левая часть в уравнениях (3.18), которая по теореме 3.2 имеет конечное значение при любом фиксированном $\tau > 0$, может оказаться равной, большей или меньшей, чем $\Phi(0) = \dfrac{\partial P}{\partial s}(\tau, 0)$. Тогда в силу оценок п. 2, она оказывается ограниченной как снизу, так и сверху одним из трех строго положительных чисел $T(\Phi(0)), \Phi(0)$ или $D(\Phi(0))$, каждое из которых по предположению (3.14) не зависит от $\tau$. Следовательно, все левые части в (3.18) равномерно ограничены на множестве значений $\tau \in (0, +\infty)$.

Для первой из систем (3.19) рассуждения аналогичны.

В несобственном же случае по крайней мере одна из систем (3.19) несовместна. Допустим, что это – вторая из них. Тогда хотя бы при одном значении индекса $i$ будет $f_i(x) > 0$ при всех $x$ с неотрицательными компонентами. В том числе и для $\overline{x}(\tau)$ – решение системы (3.18), которое существует по теореме 3.2.

Но тогда в силу

$$\overline{\lambda}_i(\tau) = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\overline{x}(\tau))) = \Phi\left(\frac{f_i(\overline{x}(\tau))}{\tau}\right)$$

будет выполняться предельное равенство

$$\varliminf_{\tau \to +0} \Phi\left(\frac{f_i(\overline{x}(\tau))}{\tau}\right) = +\infty,$$

что и приводит к заключению о наличии неограниченных компонент решений системы (3.17) для несобственной пары задач (2.1)–(2.2).

В случае несовместности первой из систем (3.19) рассуждения аналогичны.

**Теорема 3.6.** *Для собственных задач* (2.1) *и* (2.2) *вектор-функции* $\overline{x}(\tau)$ *и* $\overline{\Lambda}(\tau)$ *непрерывно дифференцируемы* $\forall \tau > 0$.

**Доказательство.** 1. Введем следующие обозначения:

$$\kappa_j = \frac{\partial Q}{\partial \xi_j} \quad \forall j = [1, n] \quad \text{и} \quad \mu_i = \frac{\partial Q}{\partial \lambda_i} \quad \forall i = [1, m].$$

Матрица Якоби системы (2.7), совпадающая с матрицей Гессе вспомогательной функции (3.2), в этом случае имеет вид

$$\|H\| = \left\|\begin{array}{cccc|cccc} -\kappa_1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{11} & -\alpha_{21} & \dots & -\alpha_{m1} \\ 0 & -\kappa_2 & \dots & 0 & -\alpha_{12} & -\alpha_{22} & \dots & -\alpha_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\kappa_n & -\alpha_{1n} & -\alpha_{2n} & \dots & -\alpha_{mn} \\ \hline -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1n} & \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2n} & \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{m1} & -\alpha_{m2} & \dots & -\alpha_{mn} & 0 & 0 & \dots & \mu_m \end{array}\right\|$$

или, в блочной записи, $\|H\| = \left\|\begin{matrix} -\|X\| & -\|A\|^{\mathrm{T}} \\ -\|A\| & \|Y\| \end{matrix}\right\|$.

Здесь элементами матрицы $\|A\|$ являются числа $\alpha_{ij}$ $\forall i = [1, m]$, $j = [1, n]$, а диагональные матрицы $\|X\|$ и $\|Y\|$ имеют элементы, определяемые формулами $\delta_{ij}\kappa_j$ $\forall i, j = [1, n]$ и $\delta_{ij}\mu_i$ $\forall i, j = [1, m]$ соответственно.

Оценим знак величины $\det\|H\|$. По свойству шуровского дополнения (см., например, гл. 4, § 6, п. 5 в [6]) и в силу правил действия с матрицами, в рассматриваемом случае справедливо равенство

$$\det\|H\| = \det\|X\| \cdot \det(\|Y\| + \|A\|\|X\|^{-1}\|A\|^{\mathrm{T}}).$$

Числа $\kappa_j$ $\forall j = [1, n]$ и $\mu_i$ $\forall i = [1, m]$ положительные, поскольку функция $Q(\tau, s)$ строго монотонно возрастающая. Поэтому очевидно, что $\det\|X\|^{-1} > 0$.

Оценим теперь второй сомножитель: $\det(\|Y\| + \|A\|\|X\|^{-1}\|A\|^{\mathrm{T}})$. Заметим, что матрицу $\|Y\|$ можно рассматривать как матрицу некоторой положительно определенной квадратичной формы в пространстве $E^m$, в то время как матрица $\|A\|\|X\|^{-1}\|A\|^{\mathrm{T}}$ (при любом значении ранга матрицы $\|A\|$) по следствию теоремы Бине–Коши (см. гл. 4, § 5, п. 6 в [6]) задает либо положительно определенную, либо положительно полуопределенную квадратичную форму в том же пространстве.

Ясно, что в этом случае матрица $(\|Y\| + \|A\|\|X\|^{-1}\|A\|^{\mathrm{T}})$ также задает в $E^m$ положительно-определенную квадратичную форму и имеет (в силу критерия Сильвестра) положительный детерминант. Поэтому окончательно мы получаем, что $\det\|H\| > 0$.

2. Невырожденность матрицы Якоби для системы уравнений (2.7) в сочетании со сделанными предположениями о гладкости функции $Q(\tau, s)$ допускает применение утверждений теоремы о неявных функциях [2] к этой системе. Отсюда следует непрерывность вектор-функций $\overline{x}(\tau)$ и $\overline{\Lambda}(\tau)$.

При этом компоненты вектор-функций $\frac{d\overline{x}}{d\tau}$ и $\frac{d\overline{\Lambda}}{d\tau}$ определяются $\forall\tau > 0$ системой линейных уравнений

$$\left\|\begin{matrix} -\|X\| & -\|A\|^{\mathrm{T}} \\ -\|A\| & \|Y\| \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \left\|\frac{d\overline{x}}{d\tau}\right\| \\ \left\|\frac{d\overline{\Lambda}}{d\tau}\right\| \end{matrix}\right\| = -\left\|\begin{matrix} \left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial\tau}\right\| \\ \left\|\frac{\partial^2 U}{\partial\Lambda\partial\tau}\right\| \end{matrix}\right\|, \tag{3.20}$$

где

$$\left\|\frac{d\overline{x}}{d\tau}\right\|_j = \frac{d\overline{\xi}_j}{d\tau} \quad \forall j = [1, n], \quad \left\|\frac{d\overline{\Lambda}}{d\tau}\right\|_i = \frac{d\overline{\lambda}_i}{d\tau} \quad \forall i = [1, m], \left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial\tau}\right\|_j = -\frac{\partial Q}{\partial\tau}(\tau, \overline{\xi}_j(\tau)) \quad \forall j = [1, n]$$

$$\text{и} \quad \left\|\frac{\partial^2 U}{\partial\Lambda\partial\tau}\right\|_i = \frac{\partial Q}{\partial\tau}(\tau, \overline{\lambda}_i(\tau)) \quad \forall i = [1, m].$$

Причем последние функции ограничены и непрерывны в силу теоремы 3.5. Поэтому из (3.20) вытекает непрерывная дифференцируемость вектор-функций $\overline{x}(\tau)$ и $\overline{\Lambda}(\tau)$ на множестве $\tau > 0$.

**Следствие 3.1.** *На седловой траектории для собственной пары задач* (2.1) *и* (2.2) *существуют конечные пределы* $\lim\limits_{\tau\to+0}\overline{x}(\tau)$, $\lim\limits_{\tau\to+0}\overline{\Lambda}(\tau)$ *и* $\lim\limits_{\tau\to+0}U(\tau, \overline{x}(\tau), \overline{\Lambda}(\tau))$.

**Доказательство.** Из непрерывной дифференцируемости и ограниченности вектор-функций $\overline{x}(\tau)$ и $\overline{\Lambda}(\tau)\forall\tau > 0$ в собственном случае следует их равномерная непрерывность на этом множестве. Поэтому пределы, указанные в формулировке следствия, существуют и конечны.

Свойства этих пределов описывают следующие теоремы.

**Теорема 3.7.** *На седловой траектории для собственной пары задач* (2.1) *и* (2.2), *имеют место равенства*

$$\lim_{\tau\to+0}\overline{\lambda}_i(\tau)f_i(\overline{x}(\tau)) = 0 \quad \forall i = [1, m], \quad \lim_{\tau\to+0}\hat{\xi}_j(\tau)g_j(\overline{\Lambda}(\tau)) = 0 \quad \forall j = [1, n],$$
$$\lim_{\tau\to+0}(F(\overline{x}(\tau)) - G(\overline{\Lambda}(\tau))) = 0.$$

**Доказательство.** 1. Заметим вначале, что для конечных $s > 0$ в силу (3.14) имеет место равенство

$$\lim_{\tau\to+0}Q(\tau, s) = \lim_{\tau\to+0}\tau\Psi(s) = 0.$$

Умножая обе части равенств (2.7) на $\overline{\lambda}_i$ $\forall i = [1, m]$ и $\overline{\xi}_j$ $\forall j = [1, n]$ соответственно, приходим к соотношениям

$$\overline{\lambda}_i(\tau)f_i(\overline{x}(\tau)) = \lambda_i(\tau)Q(\tau, \lambda_i(\tau)) \quad \forall i = [1, m],$$
$$\overline{\xi}_j(\tau)g_j(\overline{\Lambda}(\tau)) = \xi_j(\tau)Q(\tau, \xi_j(\tau)) \quad \forall j = [1, n].$$

Тогда в силу сделанного выше замечания приходим к первым двум утверждениям леммы.

2. Из условий стационарности $U$-функции следуют равенства

$$\sigma_j = Q(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\bar{\lambda}_i(\tau) \quad \forall j = [1, n],$$

в силу которых

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \bar{\xi}_j(\tau) = \sum_{j=1}^{n} \bar{\xi}_j(\tau) Q(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\bar{\lambda}_i(\tau)\bar{\xi}_j(\tau).$$

Аналогично находим, что

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \bar{\lambda}_i(\tau) = -\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i(\tau) Q(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\bar{\xi}_j(\tau)\bar{\lambda}_i(\tau).$$

Почленное вычитание двух последних равенств дает

$$F(\bar{\xi}_j(\tau)) - G(\bar{\lambda}_i(\tau)) = \sum_{j=1}^{n} \bar{\xi}_j(\tau) Q(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i(\tau) Q(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) \quad \forall \tau > 0.$$

Тогда на седловой траектории в силу п. 1 будет верным и равенство

$$\lim_{\tau \to +0} (F(\bar{x}(\tau)) - G(\bar{\Lambda}(\tau))) = 0.$$

**Теорема 3.8.** *На седловых траекториях для собственных задач* (2.1) *и* (2.2) *имеем*

$$\lim_{\tau \to +0} U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = F(x^*) = G(\Lambda^*), \tag{3.21}$$

*а в случае единственности решений* (*регулярности*) *пары задач* (2.1) *и* (2.2) *справедливы также равенства*

$$\lim_{\tau \to +0} \bar{x}(\tau) = x^* \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \to +0} \bar{\Lambda}(\tau) = \Lambda^*. \tag{3.22}$$

**Доказательство.** На седловой траектории в силу (3.16)

$$U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = L(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) - \sum_{j=1}^{n} R(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) + \sum_{i=1}^{m} R(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) \quad \forall \tau > 0,$$

поэтому $\forall \tau > 0$ справедливы оценки

$$U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) \le L(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) + \sum_{i=1}^{m} R(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) \le G^* + m \max_{i=[1,m]} R(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) \tag{3.23}$$

и

$$U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) \ge L(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) - \sum_{j=1}^{n} R(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) \ge F^* - n \max_{j=[1,n]} R(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)). \tag{3.24}$$

Для собственных задач в силу теоремы 3.5 значения всех компонент вектор-функций $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ ограничены на седловой траектории. Тогда из следствия 3.1 и теоремы 3.3 вытекает, что

$$\lim_{\tau \to +0} \max_{i=[1,m]} R(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) = \lim_{\tau \to +0} \max_{j=[1,n]} R(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) = 0$$

и существуют пределы

$$\lim_{\tau \to +0} U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = F^* = G^* \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \to +0} L(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = F^* = G^*. \tag{3.25}$$

В сделанных выше предположениях вектор-функции $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ непрерывны $\forall \tau > 0$. Тогда из непрерывности $L(x, \Lambda)$, неравенств (3.23), (3.24) и свойств суперпозиции непрерывных функций получаем

$$\lim_{\tau \to +0} L(\bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = L(\lim_{\tau \to +0} \bar{x}(\tau), \lim_{\tau \to +0} \bar{\lambda}(\tau)) = F^* = G^*.$$

**Таблица 2.** Решения системы (3.26) для примера 1 с параметром $v = 3$

| $\tau$ | $\bar{\xi}_1(\tau)$ | $\bar{\xi}_2(\tau)$ | $F(\bar{x}(\tau))$ | $\bar{\lambda}_1(\tau)$ | $\bar{\lambda}_2(\tau)$ | $G(\bar{\Lambda}(\tau))$ | $g_1(\bar{\Lambda}(\tau))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^{-1}$ | 2.754765504 | 0.146829492 | 5.950019486 | 1.595322348 | 0.142544871 | 5.641236270 | −0.119587910 |
| $10^{-2}$ | 2.980995393 | 0.011993961 | 5.997972668 | 1.615620231 | 0.185576042 | 5.960316945 | −0.013227685 |
| $10^{-3}$ | 2.998148668 | $1.1754 \times 10^{-3}$ | 5.999823636 | 1.617360455 | 0.190653620 | 5.996003086 | $-1.3323 \times 10^{-3}$ |
| $10^{-4}$ | 2.999815350 | $1.1731 \times 10^{-4}$ | 5.999823636 | 1.617531210 | 0.191167734 | 5.999600031 | $-1.3332 \times 10^{-4}$ |
| $10^{-5}$ | 2.999981540 | $1.1728 \times 10^{-5}$ | 5.999998265 | 1.617548252 | 0.191167734 | 5.999960000 | $-1.3333 \times 10^{-5}$ |
| $10^{-6}$ | 2.999998154 | $1.1728 \times 10^{-6}$ | 5.999999827 | 1.617549956 | 0.191224355 | 5.999996000 | $-1.3333 \times 10^{-6}$ |

**Таблица 3.** Решения системы (3.26) для примера 1 с параметром $v = -3$

| $\tau$ | $\bar{\xi}_1(\tau)$ | $\bar{\xi}_2(\tau)$ | $F(\bar{x}(\tau))$ | $\bar{\lambda}_1(\tau)$ | $\bar{\lambda}_2(\tau)$ | $G(\bar{\Lambda}(\tau))$ | $\bar{F}(x) - \bar{G}(\Lambda)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^3$ | 0.999000478 | 0.999990964 | 4.997973847 | 1.006016976 | 0.997002498 | 2.963964059 | 2.034009788 |
| $10^2$ | 0.990028539 | 0.999064507 | 4.977250598 | 1.061672873 | 0.970247397 | 2.636465765 | 2.340784833 |
| 10 | 0.890763029 | 0.891130932 | 4.454918853 | 1.717012067 | 0.721168975 | −0.824022353 | 5.278941206 |
| 1 | 0.104551523 | 0.048898425 | 0.355798321 | 6.557200845 | 0.086427254 | −19.153039010 | 19.508837331 |
| $10^{-1}$ | $8.6106 \times 10^{-4}$ | $4.2695 \times 10^{-4}$ | $3.0030 \times 10^{-3}$ | 60.050951736 | $8.3357 \times 10^{-3}$ | −180.102840769 | 180.105843742 |
| $10^{-2}$ | $8.3611 \times 10^{-6}$ | $4.1771 \times 10^{-6}$ | $4.9253 \times 10^{-5}$ | 600.005009704 | $8.3334 \times 10^{-4}$ | −1800.010029000 | $1.8000 \times 10^3$ |
| $10^{-3}$ | $8.3361 \times 10^{-8}$ | $4.1677 \times 10^{-8}$ | $2.9175 \times 10^{-7}$ | $6.0000 \times 10^3$ | $8.3333 \times 10^{-5}$ | −18000.001000000 | $1.8000 \times 10^4$ |

А это означает, что пределы (3.21) существуют, и что для них

$$F(\lim_{\tau\to+0} \bar{x}(\tau)) = F^* \quad \text{и} \quad G(\lim_{\tau\to+0} \bar{\Lambda}(\tau)) = G^*.$$

Наконец, в регулярном случае функция Лагранжа задач (2.1) и (2.2) имеет единственную седловую точку $\{x^*, \Lambda^*\}$, поэтому тогда справедливы и равенства (3.22).

В завершение описания свойств $U$-функции для линейных задач заметим, что единственность седловой точки $U$-функции позволяет рассматривать ее представление в виде суммы функции Лагранжа и слагаемого

$$\sum_{i=1}^{m} R(\tau, \lambda_i) - \sum_{j=1}^{n} R(\tau, \xi_j)$$

как метод регуляризации собственных (но нерегулярных) задач, а саму $U$-функцию как вариант модифицированной функции Лагранжа. Существенно, что неотрицательность оценок множителей Лагранжа гарантирована условиями (2.4).

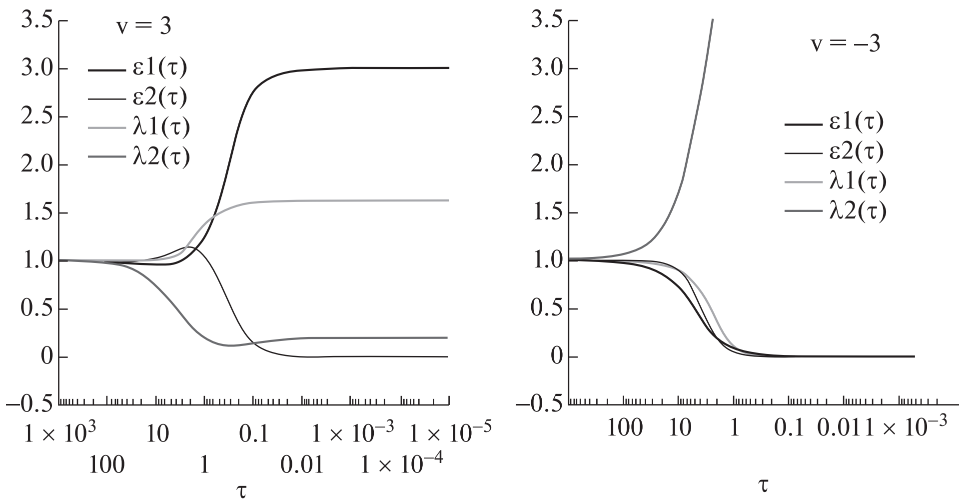
Наконец, отметим, что использование функций обратных связей возможно и для решения нелинейных задач. Обсуждение различных аспектов этого использования и примеры задач можно найти в [7].

Проиллюстрируем утверждения теорем 3.5—3.8 следующими вариантами примера 1.

Примером 1 со значением параметра $v = 3$, решение которого: $\xi_1^* = 3$, $\xi_2^* = 0$, $F^* = 6$ и $\lambda_1^* = 2 - 2t$, $\lambda_2^* = t$ $\forall t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $G^* = 6$. Решение прямой задачи единственное и *переопределенное* (т.е. в точке решения число активных ограничений больше числа переменных), а решение двойственной задачи *неединственное*.

И примером 1 со значением параметра $v = -3$, в котором прямая задача *несовместна*, а двойственная имеет *неограниченное* решение.

При решении задач (как альтернативу системе (2.8)) в качестве $P(\tau, s)$ выберем функцию, для которой $\dfrac{\partial P}{\partial s} = \dfrac{s}{\tau} + \sqrt{\left(\dfrac{s}{\tau}\right)^2 + 1}$ и соответственно $Q(\tau, s) = \dfrac{\tau}{2}\left(s - \dfrac{1}{s}\right)$.




**Фиг. 1.** Графики функций $\overline{\xi}_1(\tau)$, $\overline{\xi}_2(\tau)$, $\overline{\lambda}_1(\tau)$, $\overline{\lambda}_2(\tau)$ для решений системы (3.26) с $v = 3$ и $v = -3$.

Заметим, что при таком выборе $P(\tau, s)$ является бесконечно дифференцируемой аппроксимацией стандартной квадратичной штрафной функции, поскольку $\frac{s}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{s}{\tau}\right)^2 + 1} \sim \frac{s + |s|}{\tau}$ для малых положительных $\tau$. В этом случае система (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned}
-3 + \overline{\xi}_1 + 2\overline{\xi}_2 &= \frac{\tau}{2}\left(\overline{\lambda}_1 - \frac{1}{\overline{\lambda}_1}\right),\\
-6 + 2\overline{\xi}_1 + \overline{\xi}_2 &= \frac{\tau}{2}\left(\overline{\lambda}_2 - \frac{1}{\overline{\lambda}_2}\right),\\
-2 + \overline{\lambda}_1 + 2\overline{\lambda}_2 &= -\frac{\tau}{2}\left(\overline{\xi}_1 - \frac{1}{\overline{\xi}_1}\right),\\
-3 + 2\overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2 &= -\frac{\tau}{2}\left(\overline{\xi}_2 - \frac{1}{\overline{\xi}_2}\right).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Решения системы (3.26) для различных значений параметра $\tau$ приведены в табл. 2 и 3, а их графические представления с логарифмической шкалой аргумента показаны на фиг. 1. При этом в таблицах использованы обозначения: $\overline{F}(\tau) = F(\overline{\xi}_1(\tau), \overline{\xi}_2(\tau))$, $\overline{G}(\tau) = G(\overline{\lambda}_1(\tau), \overline{\lambda}_2(\tau))$ и $\overline{g}_1(\tau) = g_1(\overline{\lambda}_1(\tau), \overline{\lambda}_2(\tau))$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фиакко А., Мак-Кормик Г.* Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. 240 с.
2. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа (в двух томах). Т. II. М.: Высшая школа, 1981. 584 с.
3. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. Электронный ресурс . М.: Физматлит, 2011. 384 с.
4. *Умнов Е.А., Умнов А.Е.* Метод параметрической линеаризации, использующий штрафные функции со всюду обратимой производной для решения пар двойственных задач // Труды МФТИ. 2011. Т. 3. № 1(9). С. 146–152.
5. *Умнов А.Е.* Многошаговая линейная экстраполяция в методе штрафных функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 6. С. 1451–1463.
6. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984. 416 с.
7. *Умнов Е.А., Умнов А.Е.* Параметрические задачи в математическом программировании. М.: МФТИ, 2018. 297 С. // www.umnov.ru .