3. Элементы выпуклого анализа

3.1. Проекция элемента на подмножество

Определение 3.1.1	*Проекцией элемента* $x^0 \in E^n$ *на выпуклое подмножество* $\Omega \subset E^n$ называется элемент $\bar{x} \in \Omega$ такой, что $\left| x^0 - \bar{x} \right| = \inf\limits_{x\in\Omega} \left| x^0 - x \right|$. Неотрицательное число $\rho \equiv \inf\limits_{x\in\Omega} \left| x^0 - x \right|$ называется *расстоянием от элемента* x^0 *до подмножества* Ω.

Основные свойства проекций и расстояний от элемента до подмножества в E^n могут быть сформулированы в виде следующих теорем.

Теорема 3.1.1 **Для любого выпуклого замкнутого множества $\Omega \subset E^n$ и любого элемента $x^0 \in E^n$ *существует единственный* элемент $\bar{x} \in \Omega$, являющийся проекцией x^0 на Ω.**

Доказательство.

Докажем *существование* проекции.

Если $x^0 \in \Omega$, то $\bar{x} = x^0$ и $\rho = 0$.

Пусть теперь $x^0 \notin \Omega$ и существует число $\rho = \inf\limits_{x \in \Omega} \left| x^0 - x \right|$, тогда по определению точной нижней грани существует ограниченная последовательность элементов $\{x_k\} \subset \Omega$ такая, что

$$\lim_{k \to \infty} \left| x^0 - x_k \right| = \rho .$$

Например, для которой $\rho \le \left| x^0 - x_k \right| \le \rho + \dfrac{1}{k}$.

Но, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса, из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_i}\} \subset \Omega$.

Если при этом $\lim\limits_{i \to \infty} x_{k_i} = \bar{x}$, то в силу замкнутости Ω элемент $\bar{x} \in \Omega$, и для него справедливо равенство $\rho = \left| x^0 - \bar{x} \right|$. То есть, $\bar{x}$ – проекция x^0 на Ω.

Покажем теперь, что проекция *единственна*.

Без ограничения общности будем считать, что $x^0 = o$, и предположим противное: пусть в Ω существуют неравные элементы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, для которых $|\bar{x}_1| = |\bar{x}_2| = \rho$.

Рассмотрим два элемента: $y = \dfrac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2}$ и $z = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{2}$, для которых очевидны равенства $\bar{x}_1 = y + z$ и $(y, z) = 0$. Тогда

$$\rho^2 = (\bar{x}_1, \bar{x}_1) = (y + z, y + z) = |\,y\,|^2 + |\,z\,|^2$$

и, следовательно, $|\,y\,|^2 < \rho^2$, поскольку согласно сделанному предположению $z \neq o$.

Наконец, учитывая, что в силу выпуклости Ω элемент

$$y = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} \in \Omega,$$

приходим к противоречию с определением 3.1.1, что и доказывает единственность проекции.

Теорема доказана.

Теорема 3.1.2

Для того чтобы элемент $\bar{x} \in \Omega$ являлся проекцией элемента x^0 на выпуклое замкнутое множество Ω, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in \Omega$ выполнялось неравенство

$$(x - \bar{x}, x^0 - \bar{x}) \le 0.$$

Доказательство.

Докажем необходимость.

Пусть $\bar{x} \in \Omega$ – проекция x^0 на Ω, тогда элемент

$$y = \alpha x + (1-\alpha)\bar{x} \in \Omega\,, \quad \forall x \in \Omega \quad \text{при } \forall \alpha \in [0,1].$$

Для этого элемента справедлива оценка

$$\left| x^0 - y \right|^2 = \left| x^0 - (\alpha x + (1-\alpha)\bar{x}) \right|^2 =$$

$$= \left| (x^0 - \bar{x}) - \alpha(x - \bar{x}) \right|^2 =$$

$$= \left| x^0 - \bar{x} \right|^2 - 2\alpha(x^0 - \bar{x}, x - \bar{x}) + \alpha^2 \left| x - \bar{x} \right|^2.$$

В силу определения 3.1.1 $\left| x^0 - y \right|^2 \geq \left| x^0 - \bar{x} \right|^2$. А это в свою очередь означает, что

$$-2\alpha(x^0 - \bar{x}, x - \bar{x}) + \alpha^2 \left| x - \bar{x} \right|^2 \geq 0 \qquad \forall \alpha \in [0,1].$$

При $\alpha = 0$ $\quad y = \bar{x}$ т.е. неравенство $\left| x^0 - y \right|^2 \geq \left| x^0 - \bar{x} \right|^2$. очевидно верное.

Пусть $\alpha \in (0,1]$, тогда имеем

$$(x^0 - \bar{x}, x - \bar{x}) \leq \frac{\alpha}{2} \left| x - \bar{x} \right|^2 \qquad \forall \alpha \in (0,1].$$

Здесь левая часть неравенства от α не зависит, а правая стремится к нулю при $\alpha \to +0$.

Поскольку нестрогие неравенства сохраняются при предельном переходе, то получаем при фиксированном $x \in \Omega$

$$(x^0 - \bar{x}, x - \bar{x}) \leq 0 \quad \text{или} \quad (x - \bar{x}, x^0 - \bar{x}) \leq 0.$$

.

Докажем достаточность.

Пусть $\forall x \in \Omega$ справедливо неравенство

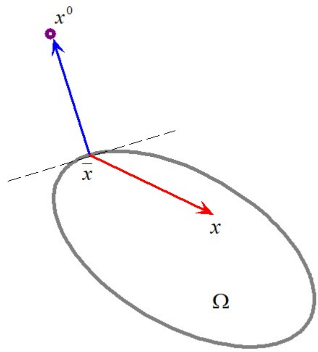
$$(x-\bar{x}, x^0-\bar{x}) \le 0.$$

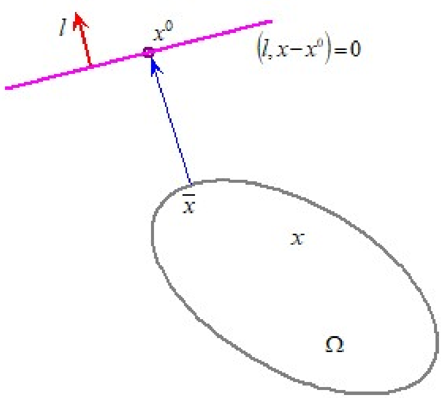
Тогда справедлива оценка

$$\left| x - x^0 \right|^2 = \left| (x-\bar{x}) - (x^0-\bar{x}) \right|^2 =$$
$$= \left| x-\bar{x} \right|^2 - 2(x-\bar{x}, x^0-\bar{x}) + \left| x^0-\bar{x} \right|^2 \ge \left| x^0-\bar{x} \right|^2.$$

Следовательно, элемент $\bar{x} \in \Omega$ является проекцией элемента x^0 на Ω.

Теорема доказана.


x^0
$\bar{x}$
x
Ω


l
x^0
$(l, x - x^0) = 0$
$\bar{x}$
x
Ω

3.2. Условия отделимости выпуклых подмножеств

Определение 3.2.1.	Непустое множество Ω, образованное из элементов линейного пространства Λ, называется *подпространством* этого линейного пространства, если для любых $x, y \in \Omega$ и любого числа λ 1) $x + y \in \Omega$, 2) $\lambda x \in \Omega$.

Определение 3.2.2.	Множество Γ, образованное из элементов вида $x + x_0$, где x_0 есть произвольный фиксированный элемент линейного пространства Λ, а x – любой элемент некоторого подпространства $\Omega \subset \Lambda$, называется *гиперплоскостью* (или *линейным многообразием*) в линейном пространстве Λ.

При построении и обосновании различных методов исследования математических моделей в E^n важную роль играют следующие теоремы.

Теорема 3.2.1 **Пусть $\Omega \subset E^n$ – выпуклое замкнутое множество. Тогда $\forall x^0 \notin \overline{\Omega}$ существует *отделяющая* гиперплоскость**

$$(l, x - x^0) = 0 \quad \textbf{с} \quad l \neq o$$

такая, что $(l, x - x^0) < 0 \quad \forall x \in \Omega$.

Доказательство.

Пусть элемент $\bar{x}$ является проекцией элемента x^0 на Ω. Выберем гиперплоскость $(l, x - x^0) = 0$ с ненулевым (в силу $\forall x^0 \notin \overline{\Omega}$) $l = x^0 - \bar{x}$, тогда, используя утверждение теоремы 3.1.2 и равенство

$$x - x^0 = (x - \bar{x}) - l,$$

получаем оценку

$$(l, x - x^0) = \\ = (x^0 - \bar{x}, x - x^0) = (x^0 - \bar{x}, x - \bar{x}) - (l, l) < 0,$$

так как $l \neq o$.

Теорема доказана.

Теорема 3.2.2 **Пусть $\Omega \subset E^n$ – выпуклое замкнутое множество. Тогда для любого граничного элемента $\bar{x}$ этого множества существует *опорная* гиперплоскость**

$$(l, x - \bar{x}) = 0 \quad \textbf{с} \quad l \neq o$$

такая, что $\quad (l, x - \bar{x}) \le 0 \quad \forall x \in \Omega$.

Доказательство.

Согласно определению граничного элемента множества $\Omega \subset E^n$ существует последовательность элементов $\{x_{(k)}\}$ таких, что:

$$1°. \qquad x_{(k)} \notin \overline{\Omega} \quad \forall k\,;$$

$$2°. \qquad \lim_{k\to\infty} x_{(k)} = \bar{x}\,;$$

По теореме 3.2.1 для каждого k существует гиперплоскость $(l_{(k)}, x - x^0_{(k)}) = 0$ такая, что:

$$3°. \qquad l_{(k)} = \frac{x_{(k)} - \bar{x}}{\left| x_{(k)} - \bar{x} \right|}\,;$$

$$4°. \qquad (l_{(k)}, x - x^0_{(k)}) < 0 \quad \forall x \in \Omega\,.$$

откуда следует, что

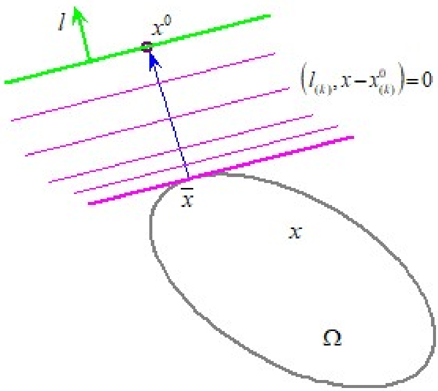
$$(l_{(k)}, x - x^0_{(k)}) \le 0 \quad \forall x \in \Omega$$

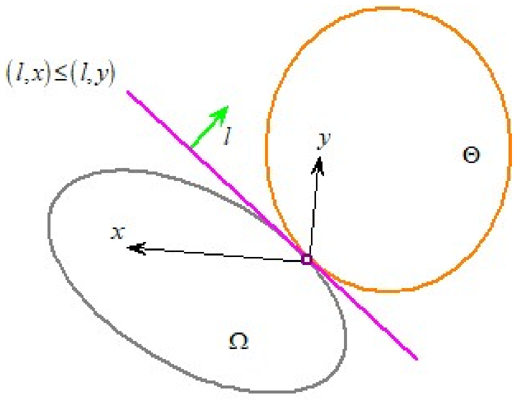
В силу предположения о сходимости $\{x_{(k)}\}$ будет сходиться и $\{l_{(k)}\}$. Пусть $\lim_{k\to\infty} l_{(k)} = l$, тогда, принимая во внимание, что предельный переход не нарушает нестрогих неравенств (теорема "*о двух мили-ционерах*"), из $\lim_{k\to\infty}(l_{(k)}, x - x^0_{(k)}) \le 0$ получаем

$$(l, x - \bar{x}) \le 0 \quad \forall x \in \Omega\,,$$

то есть, гиперплоскость $(l, x - \bar{x}) = 0$ – опорная.

Теорема доказана.


l
x^0
$(l_{(k)}, x - x^0_{(k)}) = 0$
$\bar{x}$
x
Ω


$(l, x) \le (l, y)$
l
y
Θ
x
Ω

Из курса выпуклого анализа известно, что:

1°. Если $\Omega \subset E^n$ – выпуклое множество, то множества $\overline{\Omega}$ и $\operatorname{int}\Omega$ также выпуклы.

2°. Если $\Omega \subset E^n$ и $\Theta \subset E^n$ – выпуклые множества, то множества

$$\Omega \pm \Theta = \{x \in E^n : x = x_1 \pm x_2 \ , \forall x_1 \in \Omega \ , \forall x_2 \in \Theta \ \}$$

также выпуклы.

Теорема 3.2.3 (О разделяющей гиперплоскости)

Пусть $\Omega \subset E^n$ и $\Theta \subset E^n$ – выпуклые множества такие, что любая внутренняя точка Ω не принадлежит Θ. Тогда существует разделяющая множества Ω и Θ гиперплоскость

$$(l, y - x) = 0 \quad \textbf{с} \quad l \neq o$$

такая, что

$$(l, y - x) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega \quad \textbf{и} \quad \forall y \in \Theta \,.$$

Доказательство.

Рассмотрим множество $\Theta - \operatorname{int}\Omega$, состоящее из элементов вида $y - x$, $\forall x \in \operatorname{int}\Omega$ и $\forall y \in \Theta$. Это множество выпуклое и не содержит по условию теоремы нулевого элемента.

Тогда в силу теорем 3.2.1 и 3.2.2 для каждого его внешнего элемента $y^0 - x^0$ существует гиперплоскость

$$(l,(y-x)-(y^0-x^0)) = 0 \quad \text{с} \quad l \neq o$$

такая, что $(l,(y-x)-(y^0-x^0)) \le 0$.

Поскольку элемент $y^0 - x^0 = o$ для рассматриваемого множества является внешним, то будет справедлива оценка $(l, y-x) \le 0$.

Наконец, включив путем соответствующего предельного перехода (не нарушающего нестрогие неравенства) в рассмотрение граничные точки множества Ω, получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

3.3. Теорема Фаркаша

Теорема 3.3.1 (Фредгольма).

Для того чтобы система $\|A\|\|x\|=\|b\|$ была совместной, необходимо и достаточно, чтобы *каждое* решение $\|y\|$ *сопряженной* системы

$$\|A\|^{\mathrm{T}}\|y\|=\|o\|$$

удовлетворяло условию

$$\|b\|^{\mathrm{T}}\|y\|=0.$$

Доказательство необходимости.

Пусть система уравнений (6.6.1) совместна, то есть для каждого ее решения $\|x\|$ справедливо равенство $\|b\|=\|A\|\|x\|$.

Тогда, вычисляя произведение $\|b\|^{\mathrm{T}}\|y\|$ в предположении, что $\|A\|^{\mathrm{T}}\|y\|=\|o\|$, получаем

$$\|b\|^{\mathrm{T}}\|y\|=(\|A\|\|x\|)^{\mathrm{T}}\|y\|=\|x\|^{\mathrm{T}}\|A\|^{\mathrm{T}}\|y\|=\|x\|^{\mathrm{T}}\|o\|=0.$$

Доказательство достаточности.

Пусть $\| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| = 0$ для *любого* решения системы линейных уравнений $\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| = \| o \|$. Тогда общие решения систем линейных уравнений

$$\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| = \| o \| \quad \text{и} \quad \begin{cases} \| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| = \| o \|, \\ \| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| = 0 \end{cases}$$

совпадают, и для этих систем максимальное число линейно независимых решений одинаково. Поэтому, согласно известным теоремам из курса линейной алгебры,

$$m - \mathrm{rg} \| A \|^{\mathrm{T}} = m - \mathrm{rg} \left\| \frac{A}{b} \right\|^{\mathrm{T}} \quad \text{или} \quad \mathrm{rg} \| A \|^{\mathrm{T}} = \mathrm{rg} \left\| \frac{A}{b} \right\|^{\mathrm{T}},$$

но поскольку ранг матрицы не меняется при ее транспонировании, то имеет место равенство $\mathrm{rg} \| A \| = \mathrm{rg} \| A | b \|$, означающее в силу теоремы Кронекера-Капелли совместность системы линейных уравнений $\| A \| \| x \| = \| b \|$.

Теорема доказана.

Теорема 3.3.2. (Фаркаша)

Для того чтобы $\| A \| \| x \| = \| b \|$ – система m линейных уравнений с n неизвестными имела *неотрицательное* частное решение (то есть, решение $\| x^0 \| \geq \| o \|$), необходимо и достаточно, чтобы $\| y \|$ – каждое частное решение сопряженной системы линейных неравенств

$$\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| \leq \| o \|$$

– удовлетворяло условию

$$\| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| \leq 0 .$$

Доказательство.

Докажем необходимость.

Пусть система линейных уравнений $\|A\|\|x\|=\|b\|$ имеет "неотрицательное" частное решение, то есть, покомпонентно удовлетворяющее условию $\|x^0\|\geq\|o\|$. Покажем, что в этом случае для каждого решения системы линейных неравенств

$$\|A\|^{\mathrm{T}}\|y\|\leq\|o\|$$

выполнено условие $\|b\|^{\mathrm{T}}\|y\|\leq 0$. Действительно,

$$\|b\|^{\mathrm{T}}\|y\|=\left(\|A\|\|x^0\|\right)^{\mathrm{T}}\|y\|=\|x^0\|^{\mathrm{T}}\left(\|A\|^{\mathrm{T}}\|y\|\right)\leq 0,$$

поскольку n-компонентная строка с неотрицательными элементами $\|x^0\|^{\mathrm{T}}$ умножается справа на n-компонентный столбец $\|A\|^{\mathrm{T}}\|y\|$ с неположительными элементами.

Докажем достаточность.

Пусть матрица $\|A\|$ задает линейное отображение вида $\hat{A}: E^n \to E^m$, столбцы $\|b\|,\|y\|$ задают элементы $b, y \in E^m$, а столбцы $\|x\|,\|x^0\|$ – элементы $x, x^0 \in E^n$. Обозначим через Ω множество всех элементов $v \in E^m$ таких, что $v = \hat{A}x \quad \forall x \geq o$.

Оно *очевидно* (?) выпуклое. Как показать, что из $\begin{cases} v_1 \in \Omega, \\ v_2 \in \Omega \end{cases}$ следует

$$\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0,1] \ ?$$

Если для *каждого* решения системы линейных неравенств $\|A\|^{\mathrm{T}}\|y\| \leq \|o\|$ выполнено условие $\|b\|^{\mathrm{T}}\|y\| \leq 0$ и при этом $b \in \Omega$, то достаточность доказана.

Допустим, что $b \notin \Omega$.

Покажем, что в этом случае *не для каждого* решения сопряженной системы линейных неравенств $\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| \le \| o \|$ выполнено условие $\| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| \le 0$.

Действительно, пусть элемент $u \in \Omega \subset E^m$ – *проекция* b на Ω.

Заметим, что здесь (без доказательства) мы предположили замкнутость Ω, которая гарантирует существование проекции.

Тогда для элемента $y' = b - u$ справедливы оценки:

1°. В силу теоремы 3.2.1 (об отделяющей гиперплоскости) $(y', v - b) < 0 \ \forall v \in \Omega$, но поскольку $o \in \Omega$, то , в том числе , и $(y', b) > 0$;

2°. По теореме 3.1.2 $(v - u, b - u) \le 0 \ \ \forall v \in \Omega$ или

$$(v - u, y') \le 0 \ \ \forall v \in \Omega .$$

Очевидно (?), что элемент $v + u$ также будет принадлежать множеству Ω. Тогда из последнего неравенства получаем $(v, y') \le 0 \ \ \forall v \in \Omega$. Откуда следует оценка

$$(v, y') = (\widehat{A}x, y') = (x, \widehat{A}^{+} y') \le 0 \qquad \forall x \ge o .$$

В силу произвольности $\| x \| \geq \| o \|$ имеем $\left\| \widehat{A}^{+} y' \right\| \leq \| o \|$. То есть из $b \notin \Omega$ вытекает (?) существование y' такого, что

$$\begin{cases} \| A \|^{\mathrm{T}} \| y' \| \leq \| o \|, \\ \| b \|^{\mathrm{T}} \| y' \| > 0, \end{cases}$$

поскольку $\left\| \widehat{A}^{+} \right\|_{e} = \| A \|^{\mathrm{T}}$.

Теорема доказана.