Параметры в математических задачах и моделях

При решении какой-либо математической задачи естественно желание предварительно максимально упростить постановку задачи. Однако в ряде случаев метод решения может состоять в ее обобщении или даже усложнении.

Одним из методов этого класса является *параметризация* условия задачи, тот есть изменение ее условия, путем введения в него некотором способом параметров.

Уточним предварительно смысл используемых далее понятий.

В рамках настоящего пособия под *параметром* мы будем понимать математический объект, являющийся в решаемой задаче константой, значение которой есть элемент из некоторого множества.

Приведем очевидный пример. Задача *найти вещественные решения уравнения* $x^2 - 6x - 5 = 0$ параметрически обобщается к виду *найти вещественные решения уравнения* $ax^2 + bx + c = 0$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Понятно, что, если нас интересуют корни лишь исходного уравнения, то такое усложнение условия вряд ли целесообразно.

Рассмотрим другой пример. Пусть требуется найти среди чисел $x_1 = 4$, $x_2 = -5$, $x_3 = 0$ максимальное. Применение полного перебора очевидно дает ее решение $x_{max} = 4$. Однако оно может быть получено (оцените погрешность на калькуляторе, например, при $\tau = 0.1$) по формуле

$$x_{max} = \lim_{\tau \to +0} \tau \ln\left(e^{\frac{4}{\tau}} + e^{\frac{-5}{\tau}} + e^{\frac{0}{\tau}}\right) .$$

В этой формуле используется вспомогательный положительный параметр τ, по которому выполняется предельный переход к нулю. Данная формула, конечно, сложнее, чем программа перебора вариантов, но она не требует выполнения логических операций типа «*если..., то..., иначе...*»

Из приведенных примеров можно заключить, что существуют по крайней мере два вида параметров:

— *экзогенные*, описывающие внешнюю «информационную среду» задачи, и

— *инструментальные*, не влияющие на ответ, но необходимые для реализации алгоритма поиска решения.

В приведенных примерах к первому виду можно отнести коэффициенты квадратного уравнения или значения чисел, среди которых ищется максимум. Ко второму виду относится вспомогательный параметр τ.

Рассмотрим еще один пример.

Найти значение интеграла Дирихле

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx,$$

где α — произвольный вещественный *экзогенный* параметр.

Вычислить этот интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница невозможно, поскольку неопределенный интеграл $\int \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$ «не берущийся», то есть не представляемый как некоторая суперпозиция элементарных функций.

Однако, по признаку Дирихле этот интеграл сходится, то есть $I(\alpha)$ имеет конечное значение $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Найти это значение можно, введя вещественный *инструментальный* параметр $\beta \in [0,1]$ по формуле

$$\Phi(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\, \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx.$$

В этом случае интеграл от производной подынтегральной функции по α

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x \, dx$$

будет сходиться по признаку Вейерштрасса равномерно на множестве $\beta \in [0,1]$ и притом (это — теорема!) конкретно к $\Phi'_\alpha(\alpha,\beta)$.

Кроме того, оказывается, что последний интеграл «берется» двукратным интегрированием «по частям» и, согласно формуле Ньютона-Лейбница, равен (проверьте это самостоятельно) $\dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$.

Имеем $\Phi(0,\beta) = 0$. Тогда, интегрируя при постоянном значении β $\Phi'_\alpha(\alpha,\beta) = \dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ по переменной α , получаем $\Phi(\alpha,\beta) = \operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Наконец, перейдя в последней формуле к пределу $\beta \to +0$ для фиксированного $\alpha > 0$, получим

$$I(\alpha) = \lim_{\beta\to+0} \Phi(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}.$$

А, в силу нечетности синуса, при любом α имеем $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$.

Таким образом, исходя из рассмотренных примеров, можно заключить, что, хотя параметризация и приводит к формальному усложнению задачи, возникающие при этом дополнительные степени свободы можно использовать

— как для анализа свойств решений и поиска решений со специальными свойствами,
— так и для построения альтернативных алгоритмов поиска самих решений.

Примером использования данного подходя могут служить методы решения различных типов задач, основанные на параметризации описания линий второго порядка на плоскости.

Этоти методы используют тот факт, что любая линейная комбинация уравнений линии второго порядка есть уравнение линии порядка не выше, чем 2.

Если искомая линия второго порядка должна удовлетворять определенному набору условий (например, проходить через заданный набор точек), то можно предположить, что параметризация множества таких линий позволит упростить как постановку решаемой задачи, так и метод ее решения. Скажем, при некоторых значениях параметров линейная комбинация может оказываться уравнением первого порядка.

В настоящем пособии далее рассматриваются условия применимости данного подхода в случае, когда множества параметров задаются в конечномерных пространствах при помощи систем неравенств. Также приводятся примеры решения конкретных задач.