Некоторые полезные сведения из курса элементарной математики

Хотя изначально предполагается, что студенты владеют основами элементарной математики в объеме учебных программ средней школы, представляется целесообразным привести (в справочной форме) перечень некоторых сведений, используемых в рамках предлагаемого курса.

1°. **Числа и их виды**

Как известно, основным объектом изучения в математике являются *числа,* для совокупности которых, называемой *числовым множеством,* возможно выполнение операций сравнения, сложения, умножения и т.д.

Числа разделяются на

– *натуральные,* возникающие при счете каких-либо объектов,
– *целые,* множество которых состоит из натуральных «со знаком» и числа «ноль»,
– *рациональные,* представимые в виде несокращаемого отношения двух целых чисел и
– *иррациональные,* формой представления которых является бесконечная непериодическая десятичная дробь.

В качестве общего названия рациональных и иррациональных чисел используется термин *вещественные числа.*

2°. **Формулы сокращенного умножения**

Для любых чисел a и b справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\\
&(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,\\
&a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),\\
&(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\\
&(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,\\
&a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),\\
&a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).
\end{aligned}
$$

Напомним также, что для любых *неотрицательных* чисел a и b имеет место соотношение $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, причем по определению арифметического квадратного корня принимается, что

$$\sqrt{a^2} = |a| = \left[\begin{array}{r} a, \text{если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{array} \right.$$

Отметим, что $|a|$ – *абсолютную величину* числа a, принято также называть *модулем* a.

3°. **Линейные уравнения**

Уравнение вида

$$ax + b = 0,$$

где x – неизвестное, а $a \neq 0$ и b – фиксированные числа, называется *линейным* и имеет единственное решение $x = -\dfrac{b}{a}$.

4°. **Квадратные уравнения**

Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x – неизвестное, а $a \neq 0,\ b$ и c – фиксированные числа, называется *квадратным* и имеет

при $D > 0$ *два* решения

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$$

где *дискриминант* $D = b^2 - 4ac$

при $D = 0$ *одно* решение

$$x = -\frac{b}{2a} \ ;$$

при $D < 0$ *не имеет* решений.

Если квадратное уравнение имеет корни, то будут выполняться следующие равенства (*теорема Виета*)

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \ .$$

5°. Степени и их свойства

Степенью числа a порядка k (k – натуральное число, не меньшее, чем 2), обозначаемой a^k, называется произведение вида $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{k \text{ сомножителей}}$. В этом случае число a называют *основанием*, а число k – *показателем* степени.

Степени с натуральным показателем $k \geq 2$ обладают очевидными свойствами:

$$1)\ a^{n+m} = a^n \cdot a^m;$$
$$2)\ (a^n)^m = a^{nm}.$$

Понятие степени положительного и не равного единицы числа a можно обобщить на случай, когда ее показатель есть любое рациональное число вида $p = \frac{m}{n}$, то есть числа m и $n \neq 0$ любые целые. Для этого (*по определению*) принимают, что для любого $a > 0$ и $a \neq 1$ выполняются равенства

$$a^1 = a\ ; \qquad a^0 = 1\ ; \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}\ ; \qquad a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}.$$

Тогда для степеней с рациональным показателем также будут справедливы свойства 1) и 2):

$$1)\ a^{p+q} = a^p \cdot a^q;$$
$$2)\ (a^p)^q = a^{pq}.$$

В курсе математического анализа доказывается, что соотношения 1) и 2) будут справедливы и для любых вещественных чисел p и q, при любом положительном, не равном единице вещественном числе a. Функция $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$ называется *показательной.* На рис.1.1 показан вид ее графика при $a = 3$.

6°. Логарифмы и их свойства

Логарифмом положительного числа a по основанию b (b – положительное число и $b \neq 1$), обозначаемым $\log_b a$, называется *показатель степени,* в которую следует возвести число b, чтобы получить число a.

Число b принято называть *основанием* логарифма. Отметим, что данное определение можно также представить в виде формулы

$$b^{\log_b a} = a, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad b \neq 1,$$

которую называют *основным логарифмическим тождеством.*

Для часто используемых на практике десятичных логарифмов (то есть логарифмов по основанию 10) для упрощения записи применяется

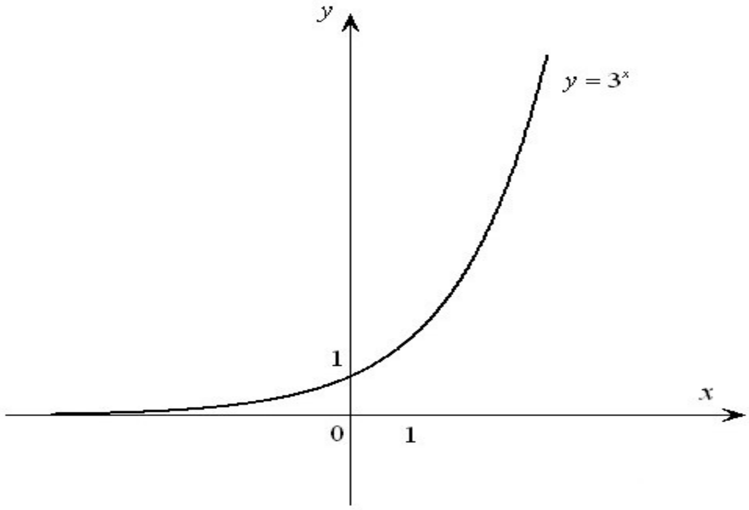

Рис. 1. График показательной функции

специальное обозначение $\log_{10} a \equiv \lg a$. По той же причине в высшей математике логарифмы по основанию e (иррациональное число $e \approx 2.72\ldots$), называемые *натуральными*, обозначают $\log_e a \equiv \ln a$.

Логарифмы для любых положительных чисел $a,\ b,\ c$ и $c \neq 1$ обладают следующими, вытекающими из их определения, свойствами:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \log_c ab = \log_c a + \log_c b;\\
&2)\ \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b;\\
&3)\ \log_c a^b = b \log_c a;\\
&4)\ \log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}, \quad b \neq 1.
\end{aligned}
$$

Формулу 4) можно использовать для перехода от одного основания логарифма к другому. Например, $\log_2 17 = \dfrac{\lg 17}{\lg 2}$.

Функция $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$ называется *логарифмической*. На рис.1.2 показан вид ее графика при $a = 3$.

7°. Тригонометрические функции, тождества и уравнения

Напомним, что углы можно измерять как в *градусной*, так и в *радианной* мере. За один *градус* принимают величину центрального угла, опирающегося на дугу в окружности, длина которой равна $\frac{1}{360}$ длины окружности. За один *радиан* принимают величину центрального угла в окружности, опирающегося на дугу, длина которой равна радиусу этой окружности. Поскольку длина окружности $2\pi r$, то угол в 360^o будет равен углу в 2π радиан.

Определение основных тригонометрических функций удобно давать при помощи так называемого “тригонометрического круга” показанного на рис.1.3.

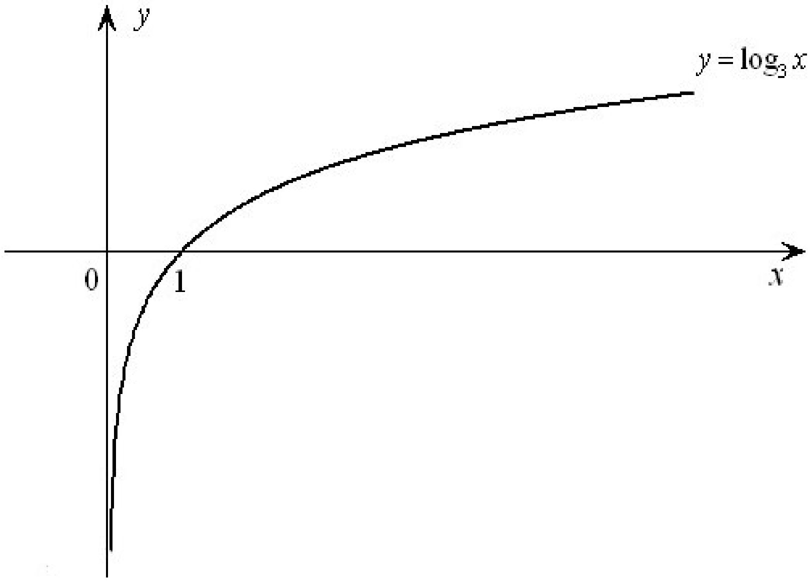

Рис. 2. График логарифмической функции

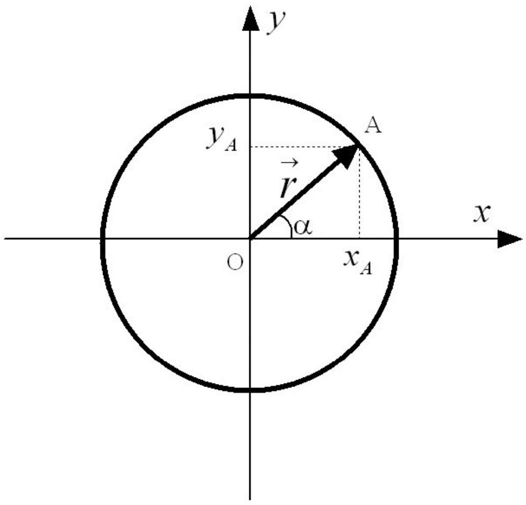

Рис. 3. Определение основных тригонометрических функций

Синусом угла α называется отношение y-координаты точки A к длине вектора $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OA}$.

Косинусом угла α называется отношение x-координаты точки A к длине вектора $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OA}$.

Тангенсом угла α называется отношение y-координаты точки A к ее x-координате.

Заметим, что в силу этих определений

1) синус и косинус имеют значения (не превосходящие по модулю 1) для *любых* углов α. В то время как тангенс может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$, но при этом не существует для углов равных $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то есть для углов $\pm 90^o$, $\pm 270^o$, $\pm 450^o, \ldots$.
2) тригонометрические функции обладают свойством *периодичности*, то есть их значения повторяются при изменении аргумента α на одно и то же минимально возможное, положительное число, называемое *периодом*. Период синуса и косинуса равен 2π , а тангенса – π .

Тригонометрические функции вещественного аргумента x (обычно измеряемого в радианной мере) принято обозначать $y = \sin x$, $y = \cos x$ и $y = \operatorname{tg} x$. Их графики приведены на рисунках 1.4 – 1.6.

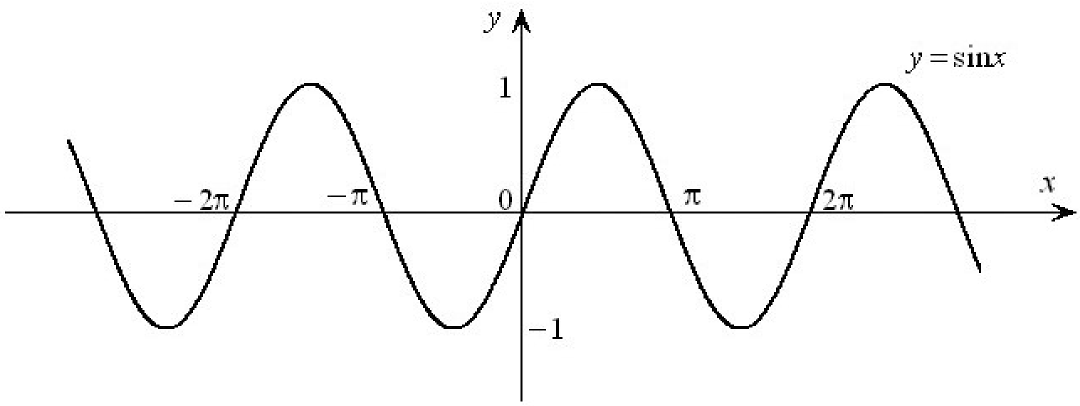

Рис. 4. График функции *синус*

Для тригонометрических функций справедливы равенства, позволяющие выражать одни из них через другие. Приведем наиболее часто употребляемые на практике соотношения.

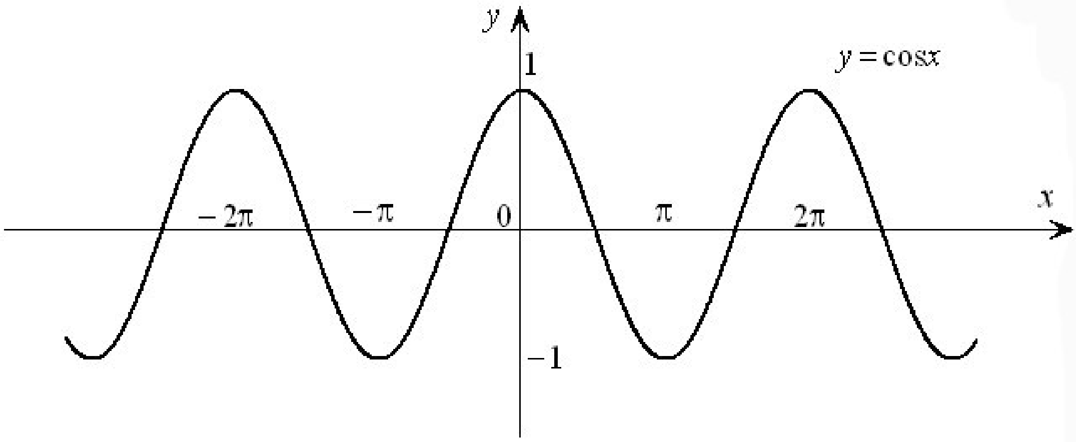

Рис. 5. График функции *косинус*

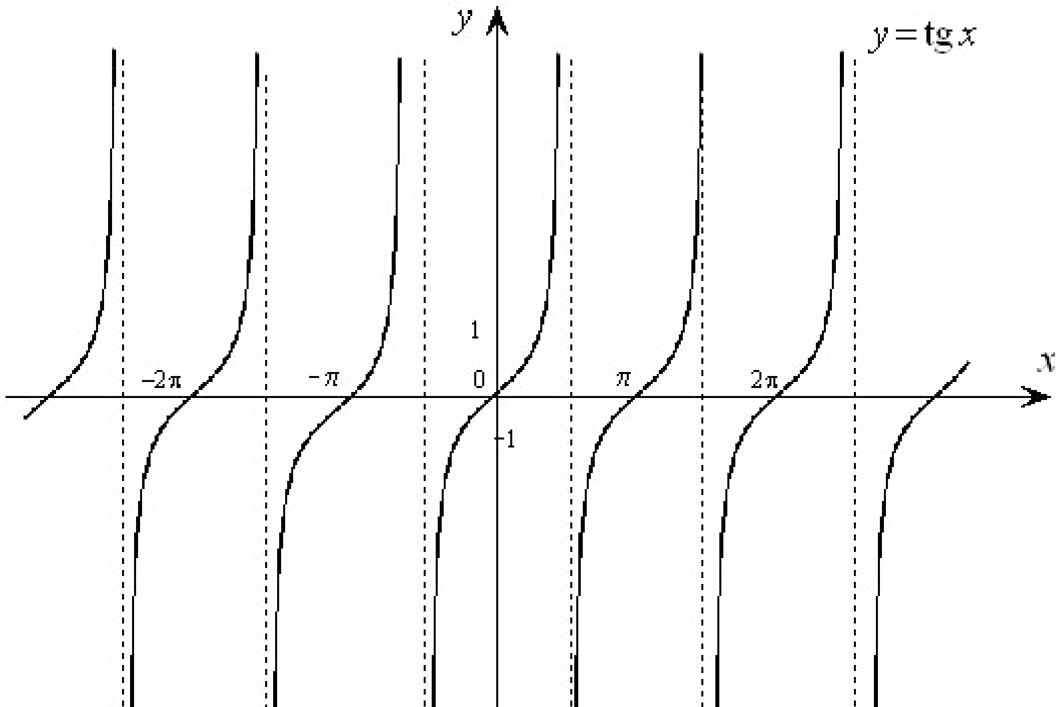

Рис. 6. График функции *тангенс*

1) Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ , \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \ , \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \ .$$

2) Формулы суммы (разности) аргументов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \ ,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \ ,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \ ,$$

3) Формулы двойных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \ , \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \ , \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \ .$$

3) Формулы преобразования суммы (разности) тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2} \ ,$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \ ,$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \ ,$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \ ,$$

В вычислительной практике достаточно часто возникает задача определения величины угла по значению какой-либо из его тригонометрических функций. Для решения этой задачи используются *обратные тригонометрические функции*: *арксинус* $y = \arcsin x$, *арккосинус* $y = \arccos x$ и *арктангенс* $y = \operatorname{arctg} x$. Напомним определения этих функций.

Арксинусом x при условии, что $|x| \le 1$, называется число y такое, что $|y| \le \frac{\pi}{2}$ и $\sin y = x$.

Арккосинусом x при условии, что $|x| \le 1$, называется число y такое, что $0 \le y \le \pi$ и $\cos y = x$.

Арктангенсом x (для любого x) называется число y такое, что $|y| \le \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} y = x$.

При решении прикладных задач часто оказывается полезной (легко проверяемой по приведенным выше определениям) формула

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}\ .$$

Отметим, что аргументы обратных тригонометрических функций не имеют размерности, в то время как их значения являются углами и изменяются как правило в радианной мере. Графики обратных тригонометрических функций приведены на рисунках 1.7 – 1.9.

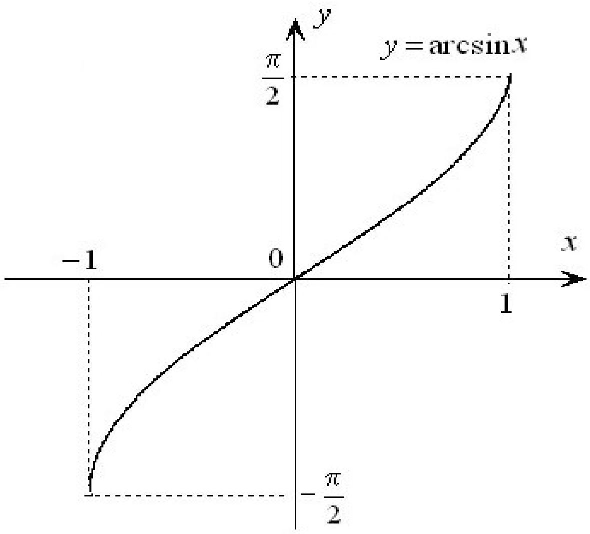

Рис. 7. График функции *арксинус*

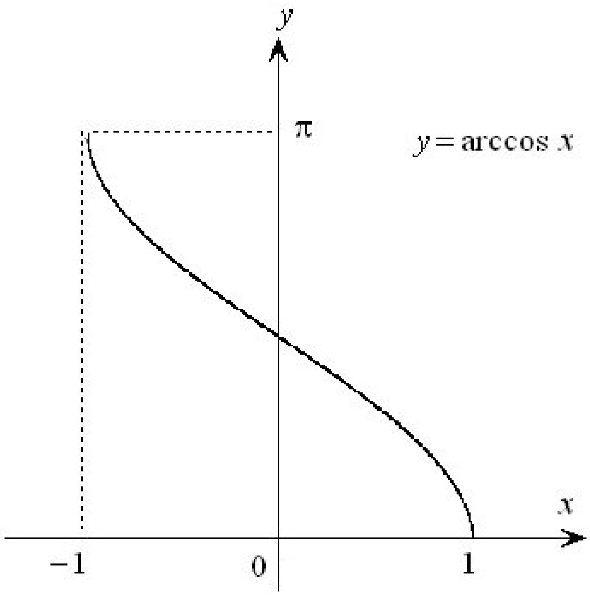

Рис. 8. График функции *арккосинус*

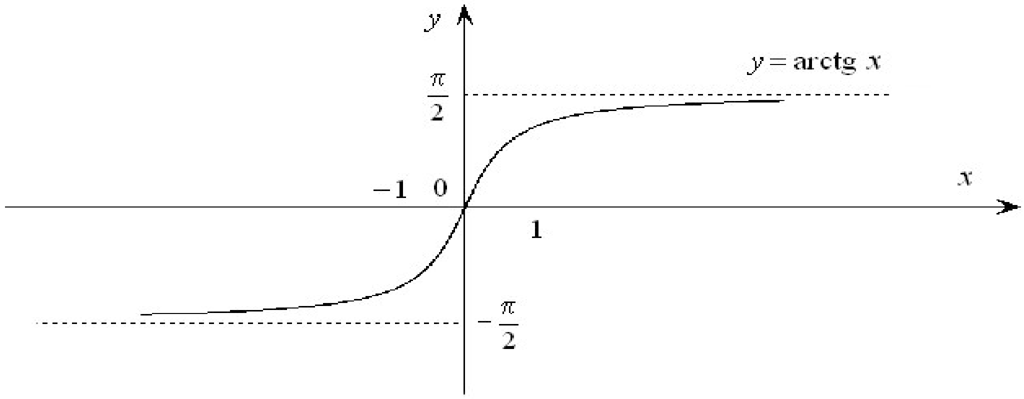

Рис. 9. График функции *арктангенс*

Обратные тригонометрические функции можно использовать при решении тригонометрических уравнений. Так, например, уравнение

$\sin x = a$ при $|a| \le 1$ имеет корни вида $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$,

уравнение $\cos x = a$ при $|a| \le 1$ имеет корни $x = \pm \arccos a + 2\pi n$,

уравнение $\operatorname{tg} x = a$ при любом a имеет корни $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$,

причем во всех этих формулах n – любое целое число, то есть, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

8°. **Множества. Элементы комбинаторики**

Под *множеством* в математике понимают совокупность объектов (или элементов), которые можно отличать как друг от друга, так и от объектов, не входящих в данную совокупность.

Тот факт, что объект x принадлежит множеству X принято обозначать как $x \in X$. Если объект x не принадлежит множеству X, то используется обозначение $x \notin X$. Для обозначения *пустого* множества, то есть не имеющего в своем составе ни одного объекта, используется символ $\emptyset$. Наконец, два множества X и Y, состоящие из одних и тех же объектов, называются *равными,* с обозначением факта равенства как $X = Y$.

Для множеств существуют операции *объединения*, обозначаемая символом $\bigcup$, и *пересечения* – $\bigcap$. Запись $x \in X \bigcup Y$ означает, что объект x принадлежит либо множеству X, либо множеству Y, либо им обоим одновременно. В свою очередь, запись $x \in X \bigcap Y$ означает, что объект x принадлежит одновременно как множеству X, так и множеству Y.

Если объектами, образующими множество X являются числа, то такое множество принято называть *числовым.* Множество состоящее из чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$, называется *отрезком* и обозначается $[a,b]$. Если же числовое множество состоит из чисел, для которых $a < x < b$, то оно называется *интервалом* и обозначается (a,b). Наконец, термин *промежуток* обозначает либо либо отрезок, либо интервал, либо *полуинтервал* вида $(a,b]$ или $[a,b)$. Промежуток, содержащий точку x, принято называть *окрестностью* этой точки.

Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждую *упорядоченную* выборку из этого множества, содержащую k элементов, называют *размещением* из n элементов по k элементов (иногда говорят: "размещение из n по k"). В рассматриваемом случае очевидно, что $0 \leq k \leq n$. Число всех размещений из n по k обозначается A_n^k. Если учесть, что при $k = 0$ существует только одно размещение – пустое множество $\emptyset$, то справедливо равенство

$$A_n^k = \left[\begin{array}{rl} 1, & \text{если } k = 0, \\ n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1), & \text{если } k > 0. \end{array} \right.$$

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n называется *n-факториалом*, его принято обозначать

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

(читается "*эн-факториал*"). С помощью этого обозначения формула для полного числа размещений упрощается и принимает вид

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Заметим, что в силу $A_0^0 = 1$, имеет смысл считать (*по определению*) $0! = 1$. Тогда данная формула будет верной для любых $0 \leq k \leq n$.

Размещение из n элементов по n называется *перестановкой* из n элементов. Число всех перестановок из n элементов $P_n = n!$.

Согласно своему определению, размещения могут отличаться друг от друга как составом своих элементов, так и порядком их следования. Если же порядок следования элементов в выборке не существенен, то такую выборку k элементов из n принято называть *сочетанием* из n элементов по k элементов (иногда говорят: "сочетание из n по k"). Формула для C_n^k – числа всех сочетаний из n по k имеет вид

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Используя эту формулу, можно получить следующие полезные соотношения: $C_n^k = C_n^{n-k}$ и

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Последнее равенство носит название *формулы бинома Ньютона* и является обобщением некоторых формул сокращенного умножения, приведенных в 2°.

9°. **Последовательности и прогрессии**

Будем говорить, что задана *числовая последовательность*, если указано правило, по которому каждому натуральному числу (номеру) n поставлено сопоставлено единственное число x_n, называемое значением n-го члена последовательности. Числовую последовательность принято обозначать как $\{x_n\}$.

Числовая последовательность называется *арифметической прогрессией* $\{a_n\}$, если каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным числом d, называемым *разностью прогрессии.* Таким образом, для задания арифметической прогрессии следует указать ее первый член и разность, тогда для любого номера n будет справедливо равенство $a_{n+1} = a_n + d$.

В арифметической прогрессии значение ее n-го члена может быть найдено по формуле $a_n = a_1 + (n-1)d$. Кроме того, справедливо равенство

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \ ,$$

позволяющее находить сумму первых n членов арифметической прогрессии.

Числовая последовательность называется *геометрической прогрессией* $\{b_n\}$, если каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное число q, называемое *знаменателем прогрессии.* Для задания геометрической прогрессии следует указать ее первый член и знаменатель, тогда для любого номера n будет справедливо равенство $b_{n+1} = b_n q$.

В геометрической прогрессии значение ее n-го члена может быть найдено по формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$. Кроме того, справедливо соотношение

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n = \left[\begin{array}{r} b_1 n, \text{если } q = 1, \\ b_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}, \text{если } q \neq 1, \end{array} \right.$$

позволяющее находить сумму первых n членов геометрической прогрессии.

Наконец, если $|q| < 1$, то такая геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, и в последнем равенстве можно перейти к пределу при неограниченном возрастании n. Величина этого предела, называемая суммой бесконечно убывающей прогрессии, будет равна $\dfrac{b_1}{1-q}$. Эта формула используется, например, для перевода записи дробных чисел из обыкновенной формы в десятичную и наоборот.

10°. **Специальные обозначения и соглашения**

В современных математических текстах допускаются некоторые стандартные обозначения, практически не применяемые в пособиях, используемых при изучении математики в средней школе. Поскольку это обстоятельство может до некоторой степени усложнить освоение студентами курса математики, представляется целесообразным привести краткое описание этих стандартов и правил их использования.

1) *Символы общности и существования*

Символ *общности* $\forall$ используется для замены слов “всякий”, “любой”, “для любого”, в то время как символ *существования* $\exists$ заменяет слова “существует”, “найдется”‘. Например, определение ограниченной числовой последовательности: последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если

найдется неотрицательное число C такое, что для любого номера n будет выполнено неравенство $|x_n| \leq C$,

может быть записано так: последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если

$$\exists C \geq 0 : \forall n : |x_n| \leq C \ .$$

2) *Символы суммирования и произведения*

Если необходимо записать выражение для суммы, в которой число слагаемых не имеет конкретного значения, но известно как зависит величина каждого слагаемого от его номера, то можно использовать специальный символ суммирования $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, указав при этом общий вид слагаемого и диапазон изменения индекса суммирования. Можно считать, что этот символ заменяет слова “сумма слагаемых вида a_k по k в пределах от 1 до n ”.

Например, сумма

$$\sin 1 + \sin 2 + \sin 3 + \cdots + \sin(n-1) + \sin n$$

записывается как

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k,$$

а сумма

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-2)(n-1)}+\frac{1}{(n-1)n}$$

представляется в виде

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k}$$

.

Аналогично, формула бинома Ньютона с помощью символа суммирования может быть записана как

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k.$$

Например, при $n=4$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Подобный вид записи существует и для операции произведения. Например, равенство $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n=n!$ можно записать в виде $\prod\limits_{k=1}^{n}k=n!$.

В заключение приведем следующие, используемые при решении многих задач высшей математики, формулы

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\ ;$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ ;$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\ ;$$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\sum_{k=1}^{n}\sin\alpha k=\frac{\sin\dfrac{(n+2)\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\ .$$

Отметим, что из этих соотношений следует любопытное равенство

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2\ .$$

11°. **Полезные неравенства**

Для любых двух неотрицательных чисел a и b верно *неравенство Коши*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\ ,$$

которое иногда используется в следующей форме: для любых двух вещественных чисел x и y справедливо соотношение

$$x^2 + y^2 \geq 2|xy|\ .$$

Неравенство Коши верно и для большего числа неотрицательных чисел:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n}\ .$$

Отметим, что с помощью символов суммирования и умножения последнее соотношение можно записать как

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}\ .$$

В большом числе прикладных задач необходимые оценки могут быть получены при помощи, вытекающего из формулы бинома Ньютона и верного для любого x и любого $a > -1$, *неравенства Бернулли*

$$(1+a)^x \geq 1 + xa\ .$$

Замечания о роли точности определений и формулировок

В процессе изучения математики следует обращать особое внимание на полноту и точность *определений, формулировок теорем и описания свойств.* Недопустима как избыточность (излишняя многословность) подобных лексем, так и потеря каких-либо их деталей.

Проиллюстрируем это следующими примерами.

1°. *Арифметический квадратный корень.* Как это уже было отмечено, по определению арифметического квадратного корня считается, что $\sqrt{a^2} = |a|$. Может возникнуть вопрос: "Не проще ли положить, что $\sqrt{a^2} = a$?" Что бы показать некорректность такого определения, рассмотрим следующую цепочку преобразований: для *любой* пары чисел x и y будут верными равенства

$$x^2 - 2xy + y^2 = y^2 - 2yx + x^2,$$
$$(x-y)^2 = (y-x)^2,$$
$$\sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(y-x)^2}.$$

Если теперь применить определение вида $\sqrt{a^2} = a$, то мы получим

$$x - y = y - x \quad \Rightarrow \quad x = y,$$

что очевидно неверно. В то время как использование определения $\sqrt{a^2} = |a|$ дает

$$|x-y| = |y-x| \quad \Rightarrow \quad 0 = 0,$$

что верно для любой пары чисел x и y.

2°. *Сколько корней может иметь квадратное уравнение?* Рассмотрим три следующих утверждения A), B) и C):

A) Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ – квадратное.

B) Квадратное равнение не может иметь более двух корней.

C) Для любых, попарно неравных чисел α, β и γ уравнение

$$\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} + \frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} = 1$$

может быть приведено к виду A) и при этом оно имеет три различных корня $x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ x_3 = \gamma$.

Очевидно, что утверждения A), B) и C) противоречивы в свой совокупности. Иначе говоря, одно из них ошибочное и, на первый взгляд, наибольшие сомнения вызывает утверждение C). Однако, оно на самом деле верное, а ошибка содержится в утверждении A). Дело в том, что квадратным называется уравнение $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$. И именно для него верно утверждение B). В нашем же случае, если привести уравнение C) к виду, указанному в утверждении A), коэффициент при x^2 окажется равным нулю. Более того, это уравнение примет вид $1=1$, то есть является *тождеством* – верным равенством при любом значении x (в том числе и при $x_1=\alpha,\ x_2=\beta,\ x_3=\gamma$).

3°. *Можно ли произвольно группировать слагаемые в сумме?* Казалось бы ассоциативность операции сложения для чисел позволяет дать положительный ответ на данный вопрос. Однако это верно лишь для сумм с *конечным* числом слагаемых. Если число слагаемых в сумме не ограничено, то возможно возникновение ситуации подобной следующей. Согласимся "на веру" с утверждением, что сумма неограниченного числа нулей равна нулю, и рассмотрим сумму вида

$$A=1+2-3+1+2-3+1+2-3+1+2-3+1+2-3+\ldots$$

сгруппировав слагаемые сначала как

$$A=(1+2-3)+(1+2-3)+(1+2-3)+(1+2-3)+(1+2-3)+\ldots$$

придем к заключению, что $A=0$, поскольку каждая сумма в скобках дает ноль. Однако, при другом способе группировки

$$A=1+(2-3+1)+(2-3+1)+(2-3+1)+(2-3+1)+(2-3+\ldots$$

получаем $A=1$. Что означает неприменимость сочетательного правила для сумм с неограниченным числом слагаемых.

Последний пример наглядно демонстрирует, что с "бесконечностью" нельзя оперировать как с обычным числом. Стоит также отметить, что методологически аналогичные проблемы могут возникнуть и в случае подмены понятий "отсутствие определенности" и "существование вероятности", которая нередко допускается при рассуждениях на интуитивном уровне.