МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Линейная экстраполяция

Чтобы оценить порядок величины вносимой погрешности рассмотрим разложение функции $\overline{x}(\tau)$ по формуле Тейлора в окрестности некоторого $\tau > 0$ до $o(\Delta\tau)$:

$$\overline{x}(\tau + \Delta\tau) = \overline{x}(\tau) + \frac{\partial \overline{x}}{\partial \tau}\Delta\tau + o(\Delta\tau),$$

из которого следует оценка при $\Delta\tau \to -\tau$ сверху:

$$\overline{x}(0) = \overline{x}(\tau) - \frac{\partial \overline{x}}{\partial \tau}\tau + o(\tau). \qquad (3.7.2.2)$$

Последнее соотношение означает, что погрешность метода по порядку малости будет совпадать с τ при условии, что вектор-функция $\overline{x}(\tau)$ непрерывно дифференцируема по τ.

С другой стороны, вектор-функция $\frac{\partial \overline{x}}{\partial \tau}\tau$ в формуле (3.7.2.2) может рассматриваться как корректирующая поправка, уменьшающая порядок погрешности, вносимой методом гладких штрафных функций. Компоненты этой вектор-функции являются решением следующей системы линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{\partial \overline{\xi}_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_j \partial \tau}; \;\; \forall j = [1, l],$$

получаемой дифференцированием соотношений (3.7.1.4) по параметру τ.

Связь с методом множителей Лагранжа

Из условий (3.7.1.3) и предположений о свойствах (в данном случае, непрерывности) штрафной функции следует существование пределов

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\partial P(\bar{x}(\tau))}{\partial f_i}, \quad \forall i=[1,m].$$

Если теперь сопоставить условие $\operatorname{grad}_x A(\tau,\bar{x}(\tau))=o$, записанное в форме

$$\operatorname{grad} F(x)+\sum_{i=1}^{m}\Big(-\frac{\partial P}{\partial f_i}\Big)\operatorname{grad} f_i=o$$

с утверждением теоремы Каруша–Куна–Таккера, то в силу существования и единственности множителей Лагранжа λ_i^*, $\forall i=[1,m]$, можно прийти к заключению, что для изолированного локального решения x^* справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\partial P(\bar{x}(\tau))}{\partial f_i}=-\lambda_i^* \quad \forall i=[1,m]$$

Иначе говоря, пределы вида $\lim\limits_{\tau\to+0}\dfrac{\partial P(\bar{x}(\tau))}{\partial f_i}$ совпадают со значениями множителей Лагранжа на оптимальном элементе, когда последние существуют и единственны. Следовательно, величины $\dfrac{\partial P(\bar{x}(\tau))}{\partial f_i}$ можно использовать для оценки величин множителей Лагранжа.

В качестве примера рассмотрим задачу, двойственную к задаче (3.7.2.1):

$$\text{\textit{найти минимум} } 2\lambda_1 + \lambda_2 \text{, \textit{при условиях}: } \begin{cases} \lambda_1 \geq 3, \\ \lambda_2 \geq 2, \end{cases}$$

решение которой $\begin{cases} \lambda_1^* = 3, \\ \lambda_2^* = 2, \end{cases}$ можно выразить также и при помощи предельных соотношений (см. задачу (3.7.2.1)).

$$\begin{cases} \lim\limits_{\tau \to +0} e^{-\frac{\overline{\xi}_1(\tau) - 2}{\tau}} = 3, \\ \lim\limits_{\tau \to +0} e^{-\frac{\overline{\xi}_2(\tau) - 1}{\tau}} = 2 \end{cases}$$

с экстремальным значением двойственного функционала

$$2\lambda_1^* + \lambda_2^* = 8.$$

Аналогичным образом соотношения

$$\lim_{\tau\to+0}\overline{\lambda}_j(\tau)=\lambda^*_j,\quad \text{где } \overline{\lambda}_j(\tau)=-\frac{\partial P(\overline{x}(\tau))}{\partial f_j};\quad \forall j=[1,m].$$

можно применить для оценки значений множителей Лагранжа в задаче (3.7.3.1)

$$\frac{\partial P(\overline{x}(\tau))}{\partial f_1}=-\frac{2\overline{\xi}_1(\tau)+\overline{\xi}_2(\tau)-3}{\tau},$$

$$\frac{\partial P(\overline{x}(\tau))}{\partial f_2}=-\frac{\overline{\xi}_1(\tau)+3\overline{\xi}_3(\tau)-4}{\tau},$$

и поэтому получаем

$$\overline{\lambda}_1(\tau)=-\frac{4}{7}+\mathrm{O}(\tau)\quad \text{и}\quad \overline{\lambda}_1(\tau)=-\frac{12}{7}+\mathrm{O}(\tau).$$