МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Описание алгоритма

Метод штрафных функций в значительном числе случаев считается наиболее подходящим средством решения задач математического программирования алгоритмом, хотя и обладающим рядом свойств, ограничивающих его применение.

Идея метода штрафных функций, сформулированная впервые Курантом в 1942 году, заключается в том, что вместо исходной задачи математического программирования решается задача поиска экстремума специального вспомогательного функционала *без каких-либо ограничений на* $x \in E^n$.

Этот вспомогательный функционал, который будем обозначать $A(\tau, x)$, выбирается равным целевому функционалу исходной задачи $F(x)$, к которому добавлены слагаемые $P(\tau, \alpha)$, "штрафующие" нарушение каждого из условий $f_i(x) \le 0$, $i = [1, m]$. Механизм штрафа заключается в том, что эта добавка мала, если соответствующее ограничение не нарушено, но отрицательна и велика по модулю, если $f_i(x) > 0$, $i = [1, m]$ на элементе x.

При использовании метода штрафных функций предполагается, что добавка $P(\tau, \alpha)$, где $\tau > 0$ – некоторый параметр[4], штрафующая нарушение ограничения вида $\alpha \ge 0$, удовлетворяет при каждом фиксированном значении α предельному соотношению

$$\lim_{\tau \to +0} P(\tau, \alpha) = \begin{cases} 0\,, & \alpha \le 0, \\ +\infty\,, & \alpha > 0. \end{cases} \qquad (3.7.1.1)$$

При этом поиск максимума вспомогательного функционала осуществляется при *фиксированном* значении параметра τ, однако его значение можно менять и использовать τ как регулятор меры штрафа за "единицу нарушения ограничения".

[4] Обычно $P(\tau, \alpha)$ называют *штрафной функцией*, а параметр τ – *коэффициентом штрафа*.

Таким образом, решение задачи математического программирования

найти максимум $F(x)$ по $x \in E^n$,

при условиях: $f_i(x) \le 0, \forall i = [1, m]$ (3.7.1.2)

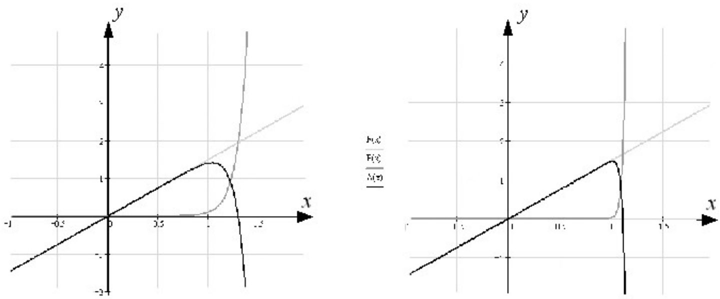
сводится к максимизации вспомогательной функции

$$A(\tau, x) = F(x) - \sum_{i=1}^{m} P(\tau, f_i(x))$$

без каких-либо ограничений.

Элемент $\overline{x}(\tau)$, на котором вспомогательная функция $A(\tau, x)$ достигает своего максимума, является приближенным решением задачи (3.7.1.2), причем величина погрешности будет стремиться к нулю при $\tau \to +0$.

Рис.3.7.1.1 иллюстрирует изменение вида вспомогательной функции при уменьшении коэффициента штрафа.



$\tau = 0.1$ $\tau = 0.025$

Рисунок 3.7.1.1.

В силу соотношения (3.7.1.1), для *любой* числовой последовательности положительных чисел $\{\tau_k\} \to +0$ при $k \to +\infty$, $k \in N$, будут выполняться предельные равенства:

$$\lim_{k \to +\infty} A(\tau_k, \bar{x}(\tau_k)) = F(x^*),$$

$$\lim_{k \to +\infty} \bar{x}(\tau_k) = x^*,$$

где $\bar{x}(\tau_k)$ – экстремальный по x элемент функционала $A(\tau, x)$ при фиксированном, положительном значении параметра $\tau = \tau_k$.

Если достаточно гладкая штрафная функция $P(r,\alpha)$ удовлетворяет также и неравенствам

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2} > 0, \forall \alpha,$$

то, можно показать, что, согласно определению предела по Гейне, данные предельные соотношения равносильны условиям

$$\lim_{\tau \to +0} A(\tau, \bar{x}(\tau)) = F(x^*), \qquad \lim_{\tau \to +0} \bar{x}(\tau) = x^*. \tag{3.7.1.3}$$

Если же $A(\tau, x)$ достаточно гладкий в E^n функционал, имеющий изолированный локальный экстремальный по x элемент, то неявно заданная *элемент-функция* $\bar{x}(\tau)$ определяется равенством:

$$\operatorname{grad}_x A(\tau, \bar{x}(\tau)) = o\,. \tag{3.7.1.4}$$

Координатное представление последнего равенства будет иметь вид:

$$\frac{\partial A}{\partial \xi_k} = 0\,,\ \forall k = [1, n],$$

Проблема точности

При использовании метода гладких штрафных функций возникает так называемая проблема точности. Поясним суть этой проблемы на следующем примере.

Рассмотрим задачу: *найти максимум* $3\xi_1 + 2\xi_2$ на $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

$$\text{\textit{при условиях}:} \begin{cases} \xi_1 \le 2, \\ \xi_2 \le 1. \end{cases} \tag{3.7.2.1}$$

В качестве штрафной функции выберем $P(\tau,\alpha)=\tau e^{-\frac{\alpha}{\tau}}$, тогда вспомогательная функция будет иметь вид

$$A(\tau,\xi_1,\xi_2)=3\xi_1+2\xi_2-\tau e^{-\frac{2-\xi_1}{\tau}}-\tau e^{-\frac{1-\xi_2}{\tau}},$$

условия стационарности на элементе $\|\bar{x}\|=\left\|\begin{matrix}\bar{\xi}_1\\ \bar{\xi}_2\end{matrix}\right\|$ которой:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial A}{\partial \xi_1}=3-e^{-\frac{\bar{\xi}_1-2}{\tau}}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial A}{\partial \xi_2}=2-e^{-\frac{\bar{\xi}_2-1}{\tau}}=0.\end{cases}$$

Откуда находим, что $\overline{\xi}_1(\tau) = 2 - \tau \ln 3$ и $\overline{\xi}_2(\tau) = 1 - \tau \ln 2$, и, следовательно, $\xi_1^* = \lim\limits_{\tau \to +0} \overline{\xi}_1(\tau) = 2$; $\xi_2^* = \lim\limits_{\tau \to +0} \overline{\xi}_2(\tau) = 1$, а точное экстремальное значение функционала на этом элементе равно 8. Таким образом, для данной задачи метод штрафных функций дает решение с погрешностью порядка величины параметра τ.

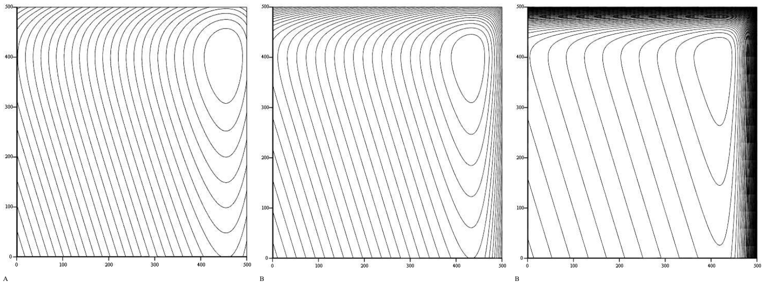


Рис. 3.7.2.1.

На рис.3.7.2.1 приведены системы изолиний вспомогательного функционала для значений коэффициента штрафа

$$\tau = 0.5\,,\ \tau = 0.3 \text{ и } \tau = 0.17\,.$$

А поскольку густота изолиний пропорциональна норме градиента, то данный рисунок наглядно демонстрирует увеличение "штрафа" за нарушение ограничений при $\tau \to +0$.

Проблема сходимости

Отмеченную выше проблему погрешности можно, казалось бы, легко решить, используя свойство (3.7.1.3), то есть, полагая значение коэффициента штрафа в процедуре максимизации вспомогательной функции достаточно малым.

Однако, следующий пример наглядно демонстрирует возникающие при этом осложнения.

Пусть требуется решить задачу математического программирования:

найти минимум $F(x) = \xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 3\xi_3^2$ *по* $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$,

при условиях:

$$\begin{aligned} 2\xi_1 \quad + \xi_2 &= 3, \\ \xi_1 + 3\xi_3 &= 4. \end{aligned} \qquad (3.7.3.1).$$

Как было показано в §3.7,1 метод штрафных функций заключается в замене исходной задачи на условный экстремум последовательностью задач без ограничений, экстремальные элементы которых сходятся к решению исходной задачи.

Функцию штрафа выберем $P(\tau,\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{2\tau}$, тогда вспомогательный функционал для рассматриваемой демонстрационной задачи будет иметь вид

$$A(\tau,x)=\xi_1^2+2\xi_2^2+3\xi_3^2+\frac{(2\xi_1+\xi_2-3)^2}{2\tau}+\frac{(\xi_1+3\xi_3-4)^2}{2\tau}.$$

Соответственно, условия его стационарности по $\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ на элементе $\overline{x}(\tau)$ будут

$$\begin{cases}\dfrac{\partial A}{\partial \xi_1}=2\overline{\xi}_1+\dfrac{2(2\overline{\xi}_1+\overline{\xi}_2-3)}{\tau}+\dfrac{\overline{\xi}_1+3\overline{\xi}_3-4}{\tau}=0,\\ \dfrac{\partial A}{\partial \xi_2}=4\overline{\xi}_2+\dfrac{2\overline{\xi}_1+\overline{\xi}_2-3}{\tau}=0,\\ \dfrac{\partial A}{\partial \xi_3}=6\overline{\xi}_3+\dfrac{3(\overline{\xi}_1+3\overline{\xi}_3-4)}{\tau}=0\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}(5+2\tau)\overline{\xi}_1 & +2\overline{\xi}_2 & +3\overline{\xi}_3 & =10,\\ 2\overline{\xi}_1 & +(1+4\tau)\overline{\xi}_2 & & =3,\\ \overline{\xi}_1 & & +(3+\tau)\overline{\xi}_3 & =4.\end{cases}\qquad(3.7.3.2)$$

Отметим, что переход к пределу при $\tau\to+0$ здесь невозможен, ибо в этом случае основная матрица системы выродится. Более того, чем меньше значение положительного параметра штрафа τ, тем ближе к нулю детерминант основной матрицы этой системы и тем значительнее вычислительные затруднения при ее решении – в первую очередь необходимость повышения точности вычислений, например, при использовании теоремы Крамера или метода Гаусса.

Преодолеть эти затруднения можно, используя опять-таки формулу Тейлора. Из системы линейных уравнений (3.7.3.2) найдем $\overline{\xi}_1(\tau)$, подставив выражения для $\overline{\xi}_2(\tau)$ и $\overline{\xi}_3(\tau)$ через $\overline{\xi}_1(\tau)$ в первое уравнение. Тогда

$$(5+2\tau)\overline{\xi}_1 + 2\frac{3-2\overline{\xi}_1}{1+4\tau} + 3\frac{4-\overline{\xi}_1}{3+\tau} = 10,$$

что для $\overline{\xi}_1(\tau)$ дает

$$\overline{\xi}_1(\tau) = \frac{\frac{80}{3}\tau + o(\tau)}{\frac{56}{3}\tau + o(\tau)} \quad \text{или} \quad \overline{\xi}_1(\tau) = \frac{10 + \frac{o(\tau)}{\tau}}{7 + \frac{o(\tau)}{\tau}} = \frac{10}{7} + O(\tau).$$

И вот теперь, переходя к пределу при $\tau \to +0$, получаем, что $\xi_1^* = \frac{10}{7}$. Аналогично находим, что $\xi_2^* = \frac{1}{7}$ и $\xi_3^* = \frac{6}{7}$.