ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Напомним, что задачей ***математического программирования*** в координатной форме называется задача:

найти максимум $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *по* $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$,

при условиях:

$$\begin{cases} f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \le 0, \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \le 0, \\ \qquad \ldots \\ f_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \le 0. \end{cases}$$

ПОСТАНОВКА
ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Единственный класс задач математического программирования, для которого разработаны универсальные и практически эффективные методы решения, составляют так называемые задачи *линейного программирования* (ЛП).

Рассмотрим конкретную форму постановки задач линейного программирования.

Прямой формой задачи ЛП, к которой может быть сведена любая задача линейного программирования, принято называть задачу:

$$\textit{Найти максимум } \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j \quad \textit{на} \quad \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in E^n,$$

$$\textit{при условиях: } \xi_j \geq 0, \quad j = [1, n], \tag{1}$$

$$-\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \leq 0, \quad i = [1, m].$$

Определение Принято говорить, что

- элемент $x^0 \in E^n$ *допустимый*, если на нем выполнены *все* ограничения задачи ЛП, то есть $x^0 \in R$;
- ограничение типа "неравенство" задачи ЛП на допустимом элементе $x^0 \in E^n$ называется *активным*, если на этом x^0 данное ограничение выполняется как равенство;
- ограниченный элемент x^* называется *решением*, если он удовлетворяет всем ограничениям, а целевой функционал имеет на нем экстремальное значение;
- ограниченное решение x^* задачи ЛП называется *переопределенным*, если число ограничений, активных на x^*, больше, чем размерность пространства E^n;
- задача ЛП *несовместна*, если множество R пусто (система линейных ограничений противоречива).

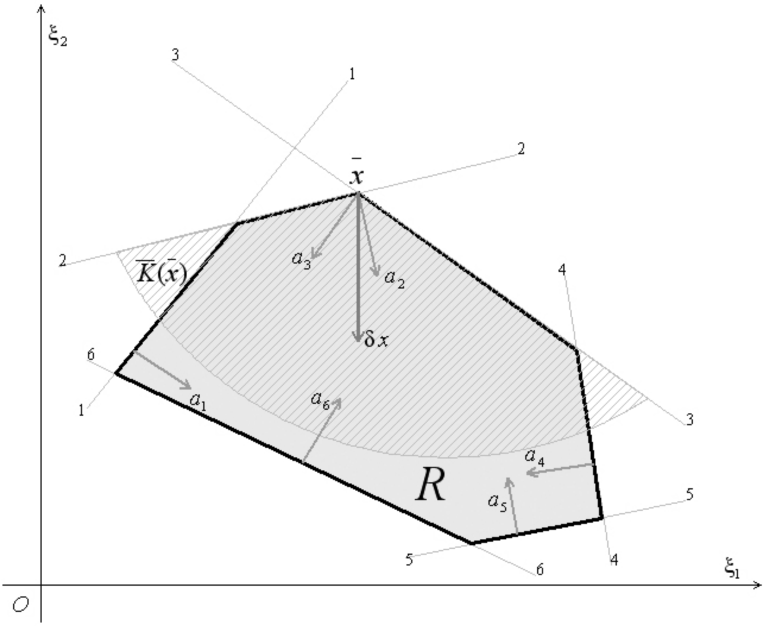

Рис.

Для выбранного граничного элемента $\bar{x}$ активными являются ограничения с индексами 2 и 3. Остальные ограничения на этом элементе неактивны. Множество допустимых элементов R отмечено серым цветом, а конус допустимых направлений $\overline{K}(\bar{x})$ заштрихован.

Условие оптимальности геометрически означает, что любая допустимая вариация δx на элементе $\bar{x}$ является в E^2 вектором, образующим не тупой угол со всеми нормальными, ориентированными внутрь R, векторами *всех активных* на $\bar{x}$ ограничениях.

Двойственные условия оптимальности

Рассмотрим задачу линейного программирования в координатной форме, называемую двойственной к исходной прямой:

$$\textit{найти минимум} \ \sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i \quad \textit{на} \quad \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \in E^m ,$$

$$\textit{при условиях}: \qquad \lambda_i \geq 0 \, ; \quad i = [1, m], \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \lambda_i \geq \sigma_j \ , \quad j = [1, n].$$

Как решаются задачи линейного программирования

Проиллюстрируем применение описанной схемы для следующей задачи линейного программирования:

Пример 1. Решить задачу:

Найти максимум $2\xi_1 + 3\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\xi_i \geq 0 , \quad j = [1, 2],$$

$$\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6,$$

$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 6.$$

Решение: Приведем условие этой задачи к каноническому виду включением в условие двух дополнительных неотрицательных компонент ξ_3 и ξ_4:

Найти максимум $2\xi_1 + 3\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} \in E^4$,

при условиях:

$$\xi_i \geq 0 , \quad j = [1,4],$$

$$\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 6,$$

$$2\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 = 6.$$

Пусть $\| x' \| = \| \xi_1 \quad \xi_2 \|^{\mathrm{T}}$, тогда в силу двух последних равенств и условия неотрицательности переменных,

$$\xi_1(\xi_3, \xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \geq 0 \text{ и}$$

$$\xi_2(\xi_3, \xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4 \geq 0 .$$

Что в свою очередь приводит к выражению для функционала

$$2\xi_1 + 3\xi_2 = 10 - \frac{4}{3}\xi_3 - \frac{1}{3}\xi_4 ,$$

из которого в силу неотрицательности ξ_3 и ξ_4 получаем, что максимальное значение функционала равно 10 на элементе $\| x^* \| = \| 2 \quad 2 \|^{\mathrm{T}}$.

Хотя описанный алгоритм принципиально применим для любой задачи ЛП, но на практике процедура контроля знаков компонент $\| x' \|$ может оказаться более сложной.

Поясним сказанное следующим примером. Попытаемся применить схему исключения в задаче такого вида.

Пример 2. Решить задачу:

Найти максимум $2\xi_1 - 3\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

$$\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$

при условиях: $\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6,$

$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 6.$$

Решение: Приведем условие этой задачи к каноническому виду включением в условие двух дополнительных неотрицательных компонент ξ_3 и ξ_4:

Найти максимум $2\xi_1 - 3\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} \in E^4$,

при условиях: $\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1,4],$

$$\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 6,$$

$$2\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 = 6.$$

Пусть снова $\| x' \| = \| \xi_1 \quad \xi_2 \|^{\mathrm{T}}$, тогда мы имеем

$$\xi_1(\xi_3, \xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \geq 0 \text{ и } \xi_2(\xi_3, \xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4 \geq 0.$$

Это приводит к иному выражению для целевого функционала

$$2\xi_1 - 3\xi_2 = -2 + \frac{8}{3}\xi_3 - \frac{7}{3}\xi_4 .$$

Из этой формулы, следует, что, в силу неотрицательности ξ_4, оптимальное значение ξ_4 следует выбрать нулевым, а вот значение ξ_3 нужно постараться сделать как можно большим.

Из равенств

$$\xi_1(\xi_3, \xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3, \xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4$$

вытекает, что с ростом ξ_3 значение ξ_1 неограниченно возрастает, а значение ξ_2 убывает, но не может стать отрицательным числом. Поэтому (учитывая, что $\xi_4 = 0$) мы приходим к следующему условию, определяющему максимально допустимую величину ξ_3

$$\xi_2(\xi_3, \xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 \geq 0 .$$

Откуда $\xi_3 \leq 3$. И окончательно мы приходим к заключению, что координаты оптимального элемента в E^4 для задачи и канонической форме имеют вид

$$\xi_1^* = 3 ; \quad \xi_2^* = 0 ; \quad \xi_3^* = 3 ; \quad \xi_4^* = 0 .$$

Следовательно, максимальное значение целевого функционала для

Связь между условиями и решениями двойственной пары задач

Например, для следующей пары задач ЛП:

***задачи* (*P*)**:

$$\text{\textit{найти максимум}} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j \quad \text{\textit{на}} \quad \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in E^n ,$$

при условиях:

$$\xi_j \geq 0 \,,\ j = [1, n], \qquad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \leq \beta_i \,,\ j = [1, m]$$

и ***задачи* (*D*):**

$$\text{\textit{найти минимум}} \sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i \quad \text{\textit{на}} \quad \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \in E^m ,$$

при условиях:

$$\lambda_i \geq 0 \,,\ i = [1, m], \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \lambda_i \geq \sigma_i \,,\ i = [1, n].$$

В теории математического программирования пары задач ЛП {(*P*)–(*D*)} и {(*D*)–(*P*)} принято называть *взаимодвойственными*, поскольку задача, двойственная к двойственной, совпадает с прямой задачей.

Основные правила, связывающие условия прямой и двойственной задач таковы:

Если в условии прямой задачи,	**то в условии двойственной задачи**
Найти максимум	Найти минимум
Найти минимум	Найти максимум
Число переменных	Число ограничений
Число ограничений	Число переменных
j -й коэффициент целевого функционала	правая часть j -го неравенства
j -я неотрицательная переменная	j -е неравенство типа $\geq$
j -я неограниченная переменная	j -е равенство
j -й столбец в матрице ограничений	j -я строка в матрице ограничений
правая часть i -го неравенства	i -й коэффициент целевого функционала
i -я строка в матрице ограничений	i -й столбец в матрице ограничений
i -е неравенство типа $\leq$	i -я неотрицательная переменная
i -е равенство	i -я неограниченная переменная

Теоремы двойственности в линейном программировании

Для каждой пары взаимодвойственных задач верна

Теорема **Если $\left\| x^* \right\| = \left\| \xi_1^* \quad \xi_2^* \quad \dots \quad \xi_n^* \right\|^{\mathrm{T}}$ – оптимальное решение прямой задачи, а $\left\| \Lambda^* \right\| = \left\| \lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \dots \quad \lambda_m^* \right\|^{\mathrm{T}}$ – оптимальное решение двойственной задачи, то справедливы равенства:**

1°. ***основное соотношение двойственности***

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j^* = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i^* ;$$

2°. ***соотношения дополняющей нежесткости***

$$\lambda_i^* (-\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j^*) = 0 \; ; \; \forall i = [1, m],$$

$$\xi_j^* (-\sigma_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \lambda_i^*) = 0 \; ; \; \forall j = [1, n].$$

Свойства пары взаимодвойственных задач ЛП

Основное соотношение двойственности и *условия дополняющей нежесткости* являются базовыми свойствами взаимодвойственной пары задач.

Теорема **Если допустимое множество одной из взаимодвойственных задач не пусто и ее целевой функционал ограничен на этом множестве, то данная задача имеет решение.**

Теорема **Если x^* и Λ^* допустимые элементы пары взаимодвойственных задач такие, что**

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j^* = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i^* ,$$

то x^* и Λ^* – решения этих задач.

Теорема **Если обе взаимодвойственные задачи имеют непустые допустимые множества, то они обе имеют решение с равными оптимальными значениями целевых функций.**

Теорема **Для существования конечных решений у пары взаимодвойственных задач необходимо и достаточно, чтобы была совместностна система неравенств:**

$$Ax \le b , \quad A^{\mathrm{T}} \Lambda \ge c, \quad x \ge o, \quad \Lambda \ge o,$$

$$(c, x) \ge (b, \Lambda) \quad .$$

Теорема **Если x^* и Λ^* оптимальные элементы пары взаимодвойственных задач, тогда**

из условия $\lambda_i^* > 0$ следует $(-\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j^*) = 0$,

а из $(-\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j^*) > 0 \to \lambda_i^* = 0, \forall i = [1, m]$.

Заметим, что утверждение, обратное утверждению теоремы 4.3.3.5, не верно: если $(-\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j^*) = 0$, то значение λ_i^* может быть нулевым. Аналогично, если $\lambda_i^* = 0$, то возможно что

$$(-\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j^*) = 0 .$$

Теорема **Если одна из взаимодвойственных задач имеет решение, то имеет решение и другая.**

Для пары взаимодвойственных задач имеет место следующая (подтверждаемая примерами) альтернатива:

а) обе задачи имеют решение: ***прямая***

Найти максимум $F = 2\xi_1 + 3\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6,$$
$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 6$$

с решением $\xi_1^* = 2,\ \xi_2^* = 2,\ F^* = 10$ и

двойственная

Найти минимум $G = 6\lambda_1 + 6\lambda_2$ *на* $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\lambda_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2,$$
$$2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3$$

с решением $\lambda_1^* = \frac{4}{3},\ \lambda_2^* = \frac{1}{3},\ G^* = 10.$

б) <u>обе задачи несовместны</u>:

Найти максимум $F = \xi_1 + 3\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$\xi_1 - \xi_2 \leq 3,$$
$$-\xi_1 + \xi_2 \leq -4.$$

и

Найти минимум $G = 3\lambda_1 - 4\lambda_2$ *на* $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\lambda_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$\lambda_1 - \lambda_2 \geq 1,$$
$$-\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3.$$

в) <u>одна задача совместна, а другая – нет:</u>

Найти максимум $F = \xi_1$ *на* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\xi_i \geq 0 , \quad j = [1,2],$$

$$\xi_1 - \xi_2 \leq 1,$$

с неограниченым целевым функционалом на множестве допустимых состояний и

Найти минимум $G = \lambda_1$ *на* $\{\lambda_1\} \in E^1$,

при условиях:

$$\lambda_1 \geq 0 ,$$

$$\lambda_1 \geq 1,$$

$$-\lambda_1 \geq 0,$$

которая несовместна.

Обратите внимание, что согласно определению 4.1.1 первая из задач в пункте в) решений не имеет. Этот факт обобщает

Теорема **Если одна из взаимодвойственных задач *недопустима*, а другая совместна, то целевая функция второй задачи *неограничена* на множестве ее допустимых элементов.**

Единственность и переопределенность решений взаимодвойственных задач ЛП

Рассмотренные выше утверждения справедливы как случаев единственного, так и неединственного решения задачи ЛП.

Следующие теоремы позволяют делать заключение о числе этих решений.

Теорема **Если одна из взаимодвойственных задач имеет *единственное, непереопределенное* решение, то другая также имеет *единственное* решение.**

Теорема **Если одна из взаимодвойственных задач имеет *единственное, переопределенное* решение, то другая задача имеет *неединственное* решение.**

Отметим также, что возможен случай, когда обе задачи взаимодвойственной пары имеют неединственное решение. Проиллюстрируем два последних утверждения примерами.

а) <u>прямая задача переопределена, а двойственная имеет неединственное решение:</u>

Найти максимум $F = 2\xi_1 + 3\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\xi_i \ge 0\,, \quad j = [1,2],$$

$$\xi_1 + 2\xi_2 \le 6,$$

$$2\xi_1 + \xi_2 \le 3$$

с решением $\xi_1^* = 0, \xi_2^* = 3, F^* = 9$

В этом случае на элементе x^* активными являются ограничения

$$\xi_1 \ge 0\,,$$

$$\xi_1 + 2\xi_2 \le 6,$$

$$2\xi_1 + \xi_2 \le 3.$$

а, поскольку их число 3>dim(E^2)=2, то это решение переопределенное,

и двойственная задача

Найти минимум $G = 6\lambda_1 + 3\lambda_2$ *на* $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\lambda_i \ge 0\,, \quad j = [1,2],$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \ge 2,$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 \ge 3$$

с решением $\lambda_1^* = t\,;\, t \in [0, \frac{4}{3}]; \quad \lambda_2^* = 3 - 2t\,; \quad G^* = 9.$

б) <u>обе задачи взаимодвойственной пары имеют неединственное решение:</u>

Найти максимум $F = \xi_1 + 2\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$2\xi_1 + 4\xi_2 \leq 4,$$
$$3\xi_1 + 6\xi_2 \leq 6,$$

с решением $\xi_1^* = t\,;\, t \in [0,2]; \quad \xi_2^* = 1 - \dfrac{1}{2}t\,; \quad F^* = 2.$

и двойственная задача

Найти минимум $G = 4\lambda_1 + 6\lambda_2$ *на* $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\lambda_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 1,$$
$$4\lambda_1 + 6\lambda_2 \geq 2,$$

с решением $\lambda_1^* = t\,;\, t \in [0, \dfrac{1}{2}]; \quad \lambda_2^* = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}t\,; \quad G^* = 2.$

Пример 3. Известно, что прямая задача

$$\textit{Найти максимум } \xi_1 + 2\xi_2 \quad \textit{на} \quad \{\xi_1, \xi_2\} \in E^2,$$
$$\xi_i \geq 0, \quad j = [1,2],$$
$$\textit{при условиях: } \xi_1 + \xi_2 \leq 3,$$
$$3\xi_1 + \xi_2 \leq 3.$$

имеет решение в точке $\xi_1^* = 0, \xi_2^* = 3$.

Требуется: составить и решить двойственную задачу. Проверить выполнение основного соотношения двойственности и соотношений дополняющей нежесткости.

Решение: 1. Задача двойственная к исходной будет иметь вид

$$\textit{Найти минимум } 3\lambda_1 + 3\lambda_2 \quad \textit{на} \quad \{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2,$$
$$\lambda_i \geq 0, \quad i = [1,2],$$
$$\textit{при условиях: } \lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 1,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq 2.$$

2. Получим ее решение, приведя ее условие задачи к каноническому виду, включением в условие двух дополнительных неотрицательных компонент λ_3 и λ_4:

$$\textit{Найти минимум } 3\lambda_1 + 3\lambda_2$$
$$\textit{на} \quad \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} \in E^4 \textit{ при условиях:}$$
$$\lambda_i \geq 0, \quad i = [1,4],$$
$$\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 1,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = 2.$$

Тогда имеем

$$\lambda_1(\lambda_3, \lambda_4) = \quad \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{3}{2}\lambda_4 \qquad \text{и}$$

$$\lambda_2(\lambda_3, \lambda_4) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda_3 - \frac{1}{2}\lambda_4 .$$

Что приводит к выражению для целевой функции

$$G(\lambda_1, \lambda_2) = 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 6 + 3\lambda_4 ,$$

из которого (в силу неотрицательности λ_4) получаем, что ее минимальное значение равно 6 при $\lambda_4 = 0$.

3. При $\lambda_4 = 0$ из неотрицательности λ_1 и λ_2 получаем, что $1 \le \lambda_3 \le 5$. Откуда $0 \le \lambda_1 \le 2$ и $0 \le \lambda_2 \le 2$.

Наконец, в силу канонического условия, имеем $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$.
А это позволяет найти решение двойственной задачи:

$$\begin{cases} \lambda_1^* = t, \quad \forall t \in [0,2], \\ \lambda_2^* = 2 - t. \end{cases}$$

4. Убедимся в справедливости основного соотношения двойственности. Действительно, по условию задачи имеем $F^* = \xi_1^* + 2\xi_2^* = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6$

$$\backslash F^* = \xi_1^* + 2\xi_2^* = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6 \; .$$

С другой стороны,

$$G^* = 3\lambda_1^* + 3\lambda_2^* = 3 \cdot t + 3 \cdot (2 - t) = 6 \, .$$

5. Наконец, проверим соотношения дополняющей нежесткости:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^*(\xi_1^* + \xi_2^* - 3) &&= t \cdot (0 + 3 - 3) = 0, \\
&\lambda_2^*(3\xi_1^* + \xi_2^* - 3) &&= (2 - t)(3 \cdot 0 + 3 - 3) = 0, \\
&\xi_1^*(\lambda_1^* + 3\lambda_2^* - 1) &&= 0 \cdot (t + 3(2 - t) - 1) = 0, \\
&\xi_2^*(\lambda_1^* + \lambda_2^* - 2) &&= 3 \cdot (t + (2 - t) - 2) = 0,
\end{aligned}$$