Ортогональные матрицы. Ортогональные проекции и ортогональные дополнения в евклидовом пространстве

Операция *скалярное произведение* в евклидовом пространстве позволяет существенно расширить область применения линейных операторов и квадратичных форм, однако это требует введения нескольких дополнительных понятий.

Определение 1. Квадратная матрица $\|Q\|$, удовлетворяющая равенству $\|Q\|^{-1} = \|Q\|^{\mathrm{T}}$, называется *ортогональной*.

Ясно, что решение систем линейных уравнений, у которых основная матрица ортогональная, просто удовольствие по сравнению, скажем, с решением по методу Крамера. Полезно также помнить такие свойства ортогональных матриц, как:

$$\|Q\|^{\mathrm{T}}\|Q\| = \|Q\|\|Q\|^{\mathrm{T}} = \|E\| \quad \text{и} \quad \det\|Q\| = \pm 1 .$$

Кроме того, в евклидовом пространстве будут справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. **Ортогональные матрицы (и только они!) в E^n могут служить матрицами перехода от одного ортонормированного базиса к другому.**

Действительно, пусть имеются два различных ортонормированных базиса $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ и $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ в E^n с матрицей перехода $\|S\|$ от первого базиса ко второму.

В этих базисах матрица Грама *единичная*, поэтому из соотношения $\|\Gamma\|_{e'} = \|S\|^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_e \|S\|$ следует равенство $\|E\| = \|S\|^{\mathrm{T}} \|E\| \|S\|$, или $\|E\| = \|S\|^{\mathrm{T}} \|S\|$. А, поскольку матрица перехода $\|S\|$ невырожденная, то имеем $\|S\|^{-1} = \|S\|^{\mathrm{T}}$.

Теорема 2. **Собственные значения линейного преобразования, имеющего в ортонормированном базисе E^n ортогональную матрицу, равны по модулю единице.**

Попробуйте доказать эту теорему (или найдите в каком-нибудь ресурсе ее доказательство) в качестве не самого простого упражнения.

Далее, пусть в E задано подпространство E_1. Рассмотрим множество $E_2 \subset E$ элементов x, ортогональных всем элементам из E_1. Тогда можно дать

Определение 2. В евклидовом пространстве E совокупность элементов x, таких, что $(x, y) = 0 \quad \forall y \in E_1 \subset E$ называется *ортогональным дополнением* множества E_1.

При этом оказываются справедливыми

Теорема 2. **Если E_2 – ортогональное дополнение подпространства $E_1 \subset E$, то E_1 является ортогональным дополнением E_2.**

и

Теорема 3. **Ортогональное дополнение k-мерного подпространства $E_1 \subset E^n$ является подпространством размерности $n - k$.**

Наконец, дадим

Определение 3. В евклидовом пространстве E элемент y называется *ортогональной проекцией* элемента x на подпространство E^*, если

1°. $y \in E^*$;

2°. $(x-y,z)=0 \quad \forall z \in E^*$.

Весьма полезной для многих приложений оказывается

Теорема 4. **Если $E^* \subset E$ является k-мерным подпространством, то элемент y – ортогональная проекция $x \in E$ на E^* – существует и единственен**.

Разберем ее доказательство.

Если в E^* существует базис $\{g_1, g_2, ..., g_k\}$, то элемент $y \in E^*$ может быть представлен в виде $y = \sum\limits_{i=1}^{k} \xi_i g_i$.

Условие $(x-y,z)=0 \ \forall z \in E^*$ равносильно ортогональности вектора $x-y$ *каждому* из базисных элементов подпространства E^* , то есть $(x-y,g_j)=0 \ \forall j=[1,k]$, и, следовательно, числа ξ_i , $i=[1,k]$ могут быть найдены из системы линейных уравнений

$$(x-\sum_{i=1}^{k}\xi_i g_i, g_j)=0 \quad \forall j=[1,k] \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{k}(g_i,g_j)\xi_i=(x,g_j) \quad \forall j=[1,k].$$

Поскольку основная матрица этой системы (как базисная матрица Грама набора линейно независимых элементов $g_1, g_2, ..., g_k$) *невырожденная*, то по теореме *Крамера* решение данной системы существует и единственно.

Отметим также, что если базис $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ в подпространстве E^* ортонормированный, то ортогональная проекция элемента x на E^* есть элемент вида $y = \sum\limits_{i=1}^{k}(x,e_i)e_i$.

Пример 2. В евклидовом пространстве E^4 с исходным ортонормированным базисом и стандартным скалярным произведением найти

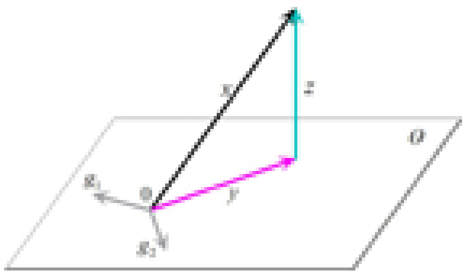
1) ортогональную проекцию элемента $x = \left\| \begin{matrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 11 \end{matrix} \right\|$ 1) на Θ − линейную оболочку

элементов $g_1 = \left\| \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$ и $g_2 = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right\|$;

2) на ортогональное дополнение к Θ .

Решение: 1°. Заметим (обоснуйте это), что элементы g_1 и g_2 не только порождают линейную оболочку Θ, но и образуют в ней ортогональный базис. Размерность Θ в данной задаче равна 2.

2°. Согласно определению 3 и правилу треугольника имеем такие соотношения: пусть y − ортогональная проекция x на Θ, тогда



$$z = x - y\ ,$$

$$y = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2\ ,$$

$$z = x - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2\ .$$

Условие ортогональности z каждому элементу из Θ будет иметь вид:

$$\begin{cases} (g_1, z) = 0, \\ (g_1, z) = 0 \end{cases} \quad \forall z \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} (g_1, g_1)\lambda_1 + (g_1, g_2)\lambda_2 = (g_1, x), \\ (g_2, g_1)\lambda_1 + (g_2, g_2)\lambda_2 = (g_2, x). \end{cases} \tag{1}$$

Найдя λ_1 и λ_2 из системы (1), мы получим y − искомую ортогональную проекция x на линейную оболочку Θ .

Для того, чтобы получить систему (1), вычислим следующие пять скалярных произведений:

$$\begin{aligned}
(g_1, g_1) &= (-1)(-1) + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 &&= 2,\\
(g_1, g_2) &= (-1)\cdot 2 + 1\cdot 2 + 0\cdot 2 + 0\cdot 3 &&= 0,\\
(g_2, g_2) &= 2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 &&= 21,\\
(g_1, x) &= (-1)(-4) + 1\cdot(-2) + 0\cdot 0 + 0\cdot 11 &&= 2,\\
(g_2, x) &= 2\cdot(-4) + 2\cdot(-2) + 2\cdot 0 + 3\cdot 11 &&= 21,
\end{aligned}$$

Тогда система (1) будет иметь вид и, соответственно, очевидное решение

$$\begin{cases} 2\cdot\lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 = 2, \\ 0\cdot\lambda_1 + 21\cdot\lambda_2 = 21 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1.$$

Отметим, что диагональность основной матрицы данной системы есть следствие ортогональности элементов g_1 и g_2.

Теперь находим ответ для первого вопроса задачи: ортогональная проекция элемента на линейную оболочку элементов g_1 и g_2 будет $y = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$. то есть, $y = 1\cdot\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + 1\cdot\begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$

3°. Ответ на второй вопрос уже практически получен, если заметить, что ортогональное дополнение к Θ (в силу определения 2) есть линейная оболочка элементов $z = x - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$.
Покажите самостоятельно, что из теоремы 3 следует, что ортогональной проекцией элемента x на ортогональное дополнение к Θ и будет именно элемент вида $z = x - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$.

При решении задач, требующих нахождения ортогональной проекции на некоторое подпространство, следует помнить, что подпространство может задаваться *не только как* линейная оболочка каких-то элементов, но также как *однородная система линейных уравнений*. Для лучшего понимания этого факта попробуйте (в качестве упражнения) решить

Пример 3. В евклидовом пространстве E^4 с исходным ортонормированным базисом и стандартным скалярным произведением найти y − ортогональную проекцию элемента $x = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{Vmatrix}$ на Θ − подпространство, заданное системой линейных уравнений $\begin{cases} -\xi_1 \quad + 2\xi_3 - \xi_4 = 0, \\ \xi_1 - \xi_2 + 3\xi_3 \quad = 0. \end{cases}$

В этой задаче у меня получился ответ $y = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

Пример 4. В евклидовом пространстве E^4 со стандартным скалярным произведением в некотором ортонормированном базисе система линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 = 0, \\ 2\xi_1 + \xi_2 \qquad\qquad = 0 \end{cases}$$

задает подпространство E^*. Найти в этом базисе матрицу линейного преобразования, выполняющего ортогональное проектирование элементов E^4 на E^*.

Решение:

1°. За базис подпространства E^* можно принять пару элементов g_1 и g_2, координатные представления которых в исходном базисе $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ являются линейно независимыми решениями однородной системы линейных уравнений, задающей E^*, например,

$$\| g_1 \|_e = \begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}; \quad \| g_2 \|_e = \begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

2°. Поскольку $\dim E^* = 2,$ то размерность ортогонального дополнения к E^* согласно теореме 3 также равна 2. За базис в этом ортогональном дополнении удобно принять элементы g_3 и g_4, такие, что $\| g_3 \|_e = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{Vmatrix}; \quad \| g_4 \|_e = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix},$

поскольку они линейно независимы и ортогональны каждому элементу из подпространства E^*, как образованные из коэффициентов заданной в условии задачи системы линейных уравнений.

3°. Элементы g_1, g_2, g_3 и g_4 линейно независимые по построению и образуют базис в E^4, и каждый элемент из E^4 может быть представлен и притом единственным образом как линейная комбинация элементов этого базиса $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$.
Искомый оператор $\hat{A}$ ортогонального проектирования элементов E^4 на E^* должен, очевидно, удовлетворять соотношениям
$\hat{A}g_1 = g_1;\quad \hat{A}g_2 = g_2;\quad \hat{A}g_3 = o;\quad \hat{A}g_4 = o,$
в силу которых его матрица в базисе $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ будет иметь следующий вид:

$$\|\hat{A}\|_g = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4°. С другой стороны, матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ к базису $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$

$$\|S\| = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

но поскольку $\|\hat{A}\|_g = \|S\|^{-1}\|\hat{A}\|_e\|S\|$ и, следовательно, $\|\hat{A}\|_e = \|S\|\|\hat{A}\|_g\|S\|^{-1}$, то, воспользовавшись правилами вычисления произведения матриц, найдем, что

$$\|\hat{A}\|_e = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{11}\begin{Vmatrix} 2 & -4 & -1 & -1 \\ -4 & 8 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 & -5 \\ -1 & 2 & -5 & 6 \end{Vmatrix}.$$