Знаковая определенность квадратичных форм

Использование элементарных преобразований для диагонального базиса квадратичной формы

Метод Лагранжа как метод непосредственного выделения полных квадратов не всегда оказывается наиболее простой (с точки зрения затрат вычислительных усилий) процедурой. Иногда приведение матрицы квадратичного функционала к диагональному (или каноническому) виду можно выполнить более эффективно путем использования некоторого набора элементарных преобразований.

Связь *диагонального* представления квадратичной формы и *канонического* является почти очевидной. Это - замена базиса, осуществляющая нормировку ненулевых λ_k с сохранением их знака. Например, делением каждой координаты ξ_k на $\sqrt{|\lambda_k|}$.

Действительно, при переходе от исходного базиса $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ к новому $\{g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\}$ с матрицей перехода $\| S \|$ матрица квадратичного функционала меняется по правилу $\| \Phi \|_{g'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| S \|$. Заметим, что по правилу транспонирования произведения матриц имеем

$$\| \Phi \|_{g'}^{\mathrm{T}} = \left(\| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| S \| \right)^{\mathrm{T}} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g^{\mathrm{T}} \left(\| S \|^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| S \| = \| \Phi \|_{g'} ,$$

то есть, из *симметричности* матрицы $\| \Phi \|_g$ следует *симметричность* матрицы $\| \Phi \|_{g'}$.

Этот материал - факультативный, "со звездочкой"

Будем теперь рассматривать матрицу $\| S \|$ как матрицу некоторого *элементарного* преобразования матрицы $\| \Phi \|_g$ такого, что умножение на нее слева $\| \Phi \|_g$ приводит последнюю к *верхнему треугольному* виду. То есть, матрица $\| \Phi \|_g \| S \|$ − *верхняя треугольная.*

Согласно свойствам элементарных преобразований известно, что в этом же случае умножение матрицы $\| \Phi \|_g$ на $\| S \|^{\mathrm{T}}$ слева приведет ее к *нижнему треугольному* виду.
Затем, если матрицу $\| \Phi \|_g \| S \|$ умножить слева на $\| S \|^{\mathrm{T}}$, то итоговая матрица $\| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| S \|$ окажется одновременно как верхней, так и нижней треугольной, т.е. *диагональной.*

Пусть матрица $\| S \|$ такова, что матрица $\| \Phi \|_{g'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| S \|$ станет диагональной. При этом, матрица $\| S \|$ (как матрица перехода от исходного *стандартного* базиса к "*диагональному*" базису) по определению состоит из столбцов, получаемых при применении "диагонализирующего" преобразования к столбцам единичной матрицы.

Поэтому, выполнив диагонализацию $\| \Phi \|_g$ некоторым набором элементарных преобразований (выполняемых на каждом шаге процедуры *как с ее строками, так и с ее столбцами*)
и,
применив тот же самый набор элементарных преобразований *только* к *столбцам* единичной матрицы, мы получим одновременно

- как *диагональный* вид матрицы квадратичной формы $\| \Phi \|_{g'}$,
- так и $\| x \|_g = \| S \| \| x \|_{g'}$

формулы перехода от исходного (стандартного) базиса $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\}$, в котором матрица квадратичной формы оказывается диагональной.

Здесь и далее, для краткости будем назвать базис, в котором квадратичная форма имеет диагональный (канонический вид), диагональным (каноническим).

Применение вышеизложенного алгоритма (о котором следует помнить и который надо уметь использовать) иллюстрирует следующий

Пример 1: *Привести в* Λ^3 *к диагональному виду квадратичную форму*

$$\Phi(x) = -2\xi_1^2 - \xi_2^2 - 4\xi_3^2 - 8\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 8\xi_2\xi_3 .$$

Решение. В исходном базисе форма $\Phi(x)$ имеет матрицу $\begin{Vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ -4 & -1 & -4 \\ 1 & -4 & -4 \end{Vmatrix}$.

1°. На *первом* шаге процедуры выполним следующие элементарные операции:

- заменим вторую строку исходной матрицы разностью второй и третьей строк;
- в полученной матрице заменим второй столбец разностью второго и третьего столбца,

в результате чего получаем матрицу вида $\begin{Vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{Vmatrix}$.

После этого, заменив в единичной матрице $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ второй столбец разностью второго и третьего, получим $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

2°. На *втором* шаге:

- заменяем вначале первую строку утроенной первой, сложенную со второй, взятой с коэффициентом 5.
- Соответственно такое же преобразование выполняется со столбцами.

Получаем следующие две матрицы:

$$\begin{Vmatrix} -93 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{Vmatrix} \text{ и } \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

3°. На *третьем* шаге заменяем третью строку первой, сложенную с третьей, взятой с коэффициентом 31.

Выполнив такие же преобразования со столбцами, соответственно получаем матрицы

$$\begin{Vmatrix} -93 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3751 \end{Vmatrix} \text{ и } \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ -5 & -1 & 26 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, мы заключаем, что переход к базису $\begin{Vmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 3 \\ 5 \\ 26 \end{Vmatrix}$

по формулам перехода $\begin{cases} \xi_1 = 3\xi'_1 + 3\xi'_3, \\ \xi_2 = 5\xi'_1 + \xi'_2 + 5\xi'_3, \\ \xi_3 = -5\xi'_1 - \xi'_2 + 26\xi'_3, \end{cases}$ даст нам следующий (один из возможных) диагональный вид исходной квадратичной формы:

$$\Phi(x) = -93\xi_1'^2 + 3\xi_2'^2 - 3751\xi_3'^2 \ .$$

Исследование знака квадратичного функционала

Несмотря на неединственность координатного описания, квадратичные формы обладают рядом важных свойств, *инвариантных* относительно (то есть, не зависящих от) выбора базиса в Λ^n. О трех таких числовых характеристиках мы уже говорили. Это *количества положительных, отрицательных и нулевых* λ_k $k=[1,n]$ для координатных представлений квадратичной формы в диагональном (или каноническом) базисах.

На практике эти (и тесно с ними связанные) характеристики используют также под другими названиями.

Определение 1.

1°. Максимальное число положительных коэффициентов диагонального (канонического) вида квадратичной формы $\Phi(x)$ в Λ^n называется ее *положительным индексом инерции* и обозначается $\mathrm{rg}_+\Phi$.

2°. Максимальное число отрицательных коэффициентов диагонального (канонического) вида квадратичной формы $\Phi(x)$ в Λ^n называется ее *отрицательным индексом инерции* и обозначается $\mathrm{rg}_-\Phi$.

3°. Разность между положительным и отрицательным индексами инерции называется *сигнатурой* квадратичной формы $\Phi(x)$ в Λ^n и обозначается $\mathrm{sgn}\Phi = \mathrm{rg}_+\Phi - \mathrm{rg}_-\Phi$.

4°. Максимальное число не равных нулю коэффициентов канонического вида квадратичной формы $\Phi(x)$ в Λ^n называется его *рангом* и обозначается $\mathrm{rg}\,\Phi$.

Независимость от выбора диагонального базиса в Λ^n числовых характеристик квадратичных форм, указанных в определении 1, следует из теоремы инерции.

При решении прикладных задач также оказываются полезными числовые характеристики квадратичных форм, инвариантные для *любых* (необязательно, скажем, диагональных) базисов.

Такие свойства у квадратичных форм существуют. Например, как мы уже видели значение любой квадратичной формы одно и то же во всех базисах.

Имеются и более интересные случаи. Например, в Λ^2 форма $\Phi(x) = \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2^2$ имеет положительные значения для любого ненулевого $x \in \Lambda^2$. А значение квадратичной формы (как мы видели) одинаково во всех базисах. Значит, это свойство будет у данной квадратичной формы в каждом базисе.

Это свойство становится очевидным, если применить метод Лагранжа (метод выделения полных квадратов):

$$\Phi(x) = \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2^2 = \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \frac{\xi_2^2}{4} + \frac{3\xi_2^2}{4} = \left(\xi_1 + \frac{\xi_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2\sqrt{3}}{2}\right)^2 .$$

Возникает интересный с точки зрения приложений вопрос: можно ли делать заключения о наличии (или отсутствии) подобных свойств у квадратичных форм только, например, по виду их матрицы (без преобразования по Лагранжу и т.п.)?

Для того, что бы корректно ответить на этот вопрос вводится понятие *знаковой определенности* квадратичной формы.

Определение 2.

1°. Квадратичная форма $\Phi(x)$ называется *положительно* (*отрицательно*) *определенным на подпространстве* $\Omega^+ \subset \Lambda$, если $\Phi(x) > 0$ ($\Phi(x) < 0$) для любого ненулевого $x \in \Omega^+$.

2°. Если же Ω^+ (или Ω^-) совпадает с Λ, то говорят, что квадратичная форма $\Phi(x)$ является *положительно* (*отрицательно*) *определенной*.

3°. Если же $\Phi(x) \ge 0$ ($\Phi(x) \le 0$) для всех ненулевых $x \in \Lambda$, то говорят, что квадратичная форма является *положительно* (*отрицательно*) *полуопределенной.* Иногда для таких квадратичных форм используют также и названия *неотрицательно* (*неположительно*) *определенная*.

4°. Если же $\Phi(x)$ на множестве $x \in \Lambda$ имеет как положительные, так и отрицательные значения, то говорят, что квадратичная форма не является *знакоопределенной.*

Заметьте, что в определении 2 нет предположений о существовании базиса в Λ.

С другой стороны, в Λ^n из теоремы инерции (как не очень сложно заметить) следует

Теорема 1. **Максимальная размерность подпространства в Λ^n , на котором квадратичная форма положительно (отрицательно) определена, равняется положительному (отрицательному) индексу инерции этой формы.**

В том случае, когда по каким-либо причинам применение определения 2 требует значительных затрат вычислительных ресурсов, можно попробовать использовать следующие условия, носящие название "*критерий Сильвестра*",

Предварительно вспомним, что для любой матрицы $\|\alpha_{ij}\|$ *минором порядка* k называется *детерминант* ее квадратной подматрицы, образованной элементами с некоторыми наборами строковых и столбцовых индексов: $\{ i_1, i_2, \dots i_k \}$ и $\{ j_1, j_2, \dots j_k \}$. В случае, когда эти наборы одинаковые, миноры называются *главными*.

Теорема 2. **Для положительной определенности квадратичной формы в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы, *имеющие вид***

$$\Delta_k = \det\begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \cdots & \varphi_{kk} \end{Vmatrix}; \quad k = [1, n], \tag{1}$$

были положительными.

Теорема 3. **Для отрицательной определенности квадратичной формы в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы главные миноры четного порядка вида (1) матрицы этой формы были положительны, а нечетного порядка – отрицательны.**

Поясним доказательство теоремы 3.

Пусть квадратичная форма $\Phi(x)$ *отрицательно* определенная, тогда форма $-\Phi(x)$ будет, очевидно, *положительно* определенной. Применяя к ней теорему 2 (критерий Сильвестра положительной определенности), получаем для главного минора k-го порядка (используя *линейное свойство* определителя, т.е., вынося из каждой строки -1) условие

$$\Delta_k = \det\begin{Vmatrix} -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & \cdots & -\varphi_{1k} \\ -\varphi_{21} & -\varphi_{22} & \cdots & -\varphi_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\varphi_{k1} & -\varphi_{k2} & \cdots & -\varphi_{kk} \end{Vmatrix} = (-1)^k \det\begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \cdots & \varphi_{kk} \end{Vmatrix} > 0 \quad \forall k = [1, n] \ ,$$

из которого следует утверждение теоремы 3.

Теорема 4. **Для отсутствия свойства знаковой определенности квадратичной формы в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы** $\begin{cases} \operatorname{rg}_+ \Phi \ge 1, \\ \operatorname{rg}_- \Phi \ge 1. \end{cases}$

Факультативно (вне программы курса), для любознательных сообщим, что, к примеру:

\

квадратичная форма полуопределена положительно тогда и только тогда, когда все (а не только угловые, вида (1)) ее главные миноры неотрицательны.

Заметим, что теорема 4 не очень удобна для решения задач, поскольку здесь фактически требуется знать какой-нибудь диагональный базис.

Однако, в качестве альтернативы можно попытаться выяснить, при каких условиях нарушаются *одновременно* теоремы 2 и 3 .

В качестве иллюстрации рассмотрим

Пример 2: *Исследовать в* Λ^2 *на знаковую определенность при любом* $\lambda \in \mathbf{R}$ *квадратичную форму* $\Phi(x) = \lambda\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 + (\lambda - 4)\xi_2^2$.

Решение. 1°. Матрица квадратичной формы здесь будет $\|\Phi\| = \left\| \begin{matrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{matrix} \right\|$. Она имеет только два главных минора вида, указанного в теореме 2 :

$$\Delta_1 = \det\|\lambda\| = \lambda \qquad \text{и} \qquad \Delta_2 = \det\left\| \begin{matrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{matrix} \right\| = \lambda^2 - 4\lambda - 4 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ ,$$

где $\lambda_1 = 2 - 2\sqrt{2} \approx -0.8$ и $\lambda_2 = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4.8$.

2°. Квадратичная форма будет положительно определенной по критерию Сильвестра (теорема 2), тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0, \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 0, \\ (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda > \lambda_2 \ .$$

3°. Квадратичная форма будет отрицательно определенной по критерию Сильвестра (теорема 3), тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \Delta_1 < 0, \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 0, \\ (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda < \lambda_1 \ .$$

4°. Используя пункты 2° и 3°, приходим к заключению, теоремы 2 и 3 одновременно нарушаются в случае $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$. Причем форма нарушения есть *строгое* неравенство вида $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) < 0$. Следовательно, $\Phi(x)$ не является знакоопределенной для $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$.

5°. Среди вещественных λ остались неисследованными только два значения: $\lambda = \lambda_1 = 2 - 2\sqrt{2}$ и $\lambda = \lambda_2 = 2 + 2\sqrt{2}$. Здесь мудрить не будем. Просто найдем конкретные формулы для $\Phi(x)$ в этих случаях.

Имеем, вспоминая упражнения по алгебре для 8 класса:

1) при $\lambda = 2 - 2\sqrt{2}$

$$\Phi(x) = \left(2 - 2\sqrt{2}\right)\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 - \left(2 + 2\sqrt{2}\right)\xi_2^2 =$$

$$= (-2)\left(\left(\sqrt{2} - 1\right)\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + \left(\sqrt{2} + 1\right)\xi_2^2\right) =$$

$$= (-2)\left(\left(\sqrt{\sqrt{2} - 1}\;\xi_1\right)^2 - 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}\,\xi_1\sqrt{\sqrt{2} + 1}\,\xi_2 + \left(\sqrt{\sqrt{2} + 1}\,\xi_2\right)^2\right),$$

поскольку, как можно заметить, $\sqrt{\sqrt{2} - 1}\sqrt{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1} = 1$.

Тогда окончательно получаем, что

$$\Phi(x) = (-2)\left(\sqrt{\sqrt{2} - 1}\;\xi_1 - \sqrt{\sqrt{2} + 1}\,\xi_2\right)^2 \le 0 ,$$

причем $\Phi(x) = 0$ в некоторых ненулевых точках, например, вида

$$x = \{\sqrt{\sqrt{2} + 1}\;t\,;\;\sqrt{\sqrt{2} - 1}\;t\}\quad \forall t \ne 0 ,$$

т.е. квадратичная форма $\Phi(x)$ при $\lambda = 2 - 2\sqrt{2}$ отрицательно полуопределена (определена неположительно).

2) Покажите самостоятельно, что при $\lambda = 2 + 2\sqrt{2}$ квадратичная форма полуопределена положительно.

Замечания: 1) Данную задачу, конечно можно было бы решить методом Лагранжа, не прибегая к использованию теорем 2 и 3, однако, для $n \ge 3$ это уже вряд ли разумно.

2) В экзаменационной практике встречаются задачи с формулировкой типа: "исследовать квадратичную форму на положительную определенность", не на *знаковую*(!), а только на *положительную* определенность. Будьте внимательны и не делайте лишнюю работу.