

Инвариантные подпространства линейных преобразований

Определение

Пусть линейный оператор \hat{A} , действует в линейном пространстве L и имеет значения в этом же пространстве. Иначе говоря, образы и прообразы для \hat{A} принадлежат L , т.е. \hat{A} есть линейное преобразование пространства L . Тогда

Множество Ω называется *инвариантным подпространством преобразования \hat{A}* , если $\forall x \in \Omega \rightarrow \hat{A}x \in \Omega$. (1)

Пример 1. Найти в L^3 все двумерные инвариантные подпространства линейного преобразования \hat{A} ,

$$\text{для которого в стандартном базисе } \|\hat{A}\| = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

- 1) Для линейного преобразования \hat{A} координаты образов связаны с координатами прообразов равенством

$$\|x^*\| = \|\hat{A}\| \|x\|, \quad (2)$$

$$\text{где } \|x\| = \|\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3\|^T \text{ и } \|x^*\| = \|\xi_1^* \ \xi_2^* \ \xi_3^*\|^T.$$

Пусть искомое подпространство задается уравнением

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0, \quad \text{где } |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| \neq 0.$$

Допустимость такого описания следует из того, что двумерное подпространство в L^3 можно задать при помощи однородной системы линейных уравнений с тремя неизвестными, ранг основной матрицы которой равен единице.

В этом случае наша задача сводится к нахождению значений коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Из определения инвариантности (1) следует, что координаты образов точек искомого подпространства должны удовлетворять уравнению

$$\alpha_1 \xi_1^* + \alpha_2 \xi_2^* + \alpha_3 \xi_3^* = 0. \quad (3)$$

2) Матричное равенство (2) в координатах принимает форму системы равенств вида:

$$\begin{cases} \xi_1^* = -2\xi_1 - 4\xi_2 + 3\xi_3, \\ \xi_2^* = 2\xi_1 + 4\xi_2 - 3\xi_3, \\ \xi_3^* = 2\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3. \end{cases} \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$\alpha_1(-2\xi_1 - 4\xi_2 + 3\xi_3) + \alpha_2(2\xi_1 + 4\xi_2 - 3\xi_3) + \alpha_3(2\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3) = 0,$$

а, после перегруппировки слагаемых,

$$\beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3 = 0, \quad (5)$$

где

$$\begin{cases} \beta_1 = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ \beta_2 = -4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ \beta_3 = 3\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3. \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что, если (3) есть уравнение, задающее искомое подпространство, то и (5) также будет его описанием.

При этом, в силу однородности уравнений (3) и (5), коэффициенты в этих уравнениях могут отличаться на один и тот же постоянный множитель. Иначе говоря,

$$\exists k : \quad \beta_1 = k\alpha_1; \quad \beta_2 = k\alpha_2; \quad \beta_3 = k\alpha_3.$$

Если эти равенства подставить в (6), то мы получим условия, задающие искомые коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, следующего вида:

$$\begin{cases} k\alpha_1 = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ k\alpha_2 = -4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ k\alpha_3 = 3\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (-2-k)\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -4\alpha_1 + (4-k)\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 + (-1-k)\alpha_3 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Рассматривая (7) как однородную систему линейных уравнений с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, нетрудно заметить, что условие существования у (7) ненулевых решений, вытекающее из ограничения

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| \neq 0,$$

имеет вид

$$\det \begin{vmatrix} -k-2 & 2 & 2 \\ -4 & -k+4 & 2 \\ 3 & -3 & -k-1 \end{vmatrix} = 0$$

или $k(k+1)(k-2) = 0$, т.е. ненулевые решения у системы (7) могут существовать лишь при $k = 0, k = -1$ или $k = 2$.

3) Решая последовательно систему (7) при этих конкретных k , мы получим

$$\text{при } k = 0 \begin{cases} -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall C \neq 0;$$

$$\text{при } k = -1 \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall C \neq 0;$$

$$\text{при } k = 2 \begin{cases} -4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall C \neq 0;$$

Используя найденные варианты для коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, приходим к заключению, что линейное преобразование имеет три двумерных инвариантных подпространства, задаваемых уравнениями:

$$\xi_1 + \xi_2 = 0; \quad 2\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 = 0; \quad \xi_2 - \xi_3 = 0.$$

4) Решение задачи нами получено, однако при внимательном анализе возникает следующий вопрос.

Если (3) – это уравнение *образа* подпространства

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0,$$

то (7) – это уравнение *прообраза* для этого образа.

Что в этом случае означают равенства $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$? Ведь в этом случае получается, что *любая* точка в L^3 имеет своим образом точку в подпространстве $\xi_1 + \xi_2 = 0$.

Дело в том, что подпространство $\xi_1 + \xi_2 = 0$ есть *область значений* преобразования \hat{A} . (Проверьте это самостоятельно, используя, например, теорему Кронекера-Капелли.)

В том числе и все точки из подпространства $\xi_1 + \xi_2 = 0$ имеют свои образы в этом же подпространстве. Значит оно инвариантное.

Выходя за рамки рассмотренной задачи, можно также отметить, что данное преобразование имеет инвариантные подпространства с размерностью, отличной от 2.

Во-первых, инвариантными подпространствами для рассматриваемого преобразования формально будут:

- *нулевое* подпространство, состоящее только из нулевого элемента, (размерности 0);
- *само все пространство* L^3 (размерности 3);
- *каждое собственное* подпространство (размерности 1).

Проверьте самостоятельно справедливость этих утверждений в условиях рассмотренной задачи.