Примеры решения задач на тему "Собственные векторы и собственные значения линейных преобразований"

Пример 1. Найти в L^2 собственные значения и собственные векторы линейного преобразования $\hat{A}$, для которого в стандартном базисе $\| \hat{A} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Решение. 1) Характеристическое уравнение (4) в данном случае имеет вид:

$$\det \begin{Vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda-1)^2 = 0.$$

Значит, у данного преобразования одно собственное значение $\lambda_{1,2} = 1$ кратности $k = 2$.

2) Для $\lambda = 1$ составим систему (3):

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 \cdot \phi_1 + 1 \cdot \phi_2 = 0, \\ 0 \cdot \phi_1 + 0 \cdot \phi_2 = 0 \end{cases}, \text{ откуда} \quad \| f_{(1)} \| = \begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Значит, собственным вектором является *любой* элемент L^2 с координатным представлением вида $C \| f_{(1)} \|$, где $C \neq 0$. Одномерным собственным подпространством будет линейная оболочка элемента $f_{(1)}$.

Пример 2. Найти в L^3 собственные значения и собственные векторы линейного преобразования $\hat{A}$, для которого в стандартном базисе $\|\hat{A}\| = \left\|\begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|$.

Решение. **1.** Решим задачу, предположив сначала, что L^3 *комплексное* линейное пространство.

1) Составим характеристическое уравнение (4)

$$\det\left\|\begin{matrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{matrix}\right\| = 0 \text{, по правилу "треугольников"}$$

$$-(\lambda-1)^2(\lambda+1)+4(\lambda-1)=0.$$

или окончательно $(\lambda-1)(\lambda^2+3)=0$. Его решениями будут числа: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{3}$. Это − собственные значения $\hat{A}$.

2) Найдем, соответствующие этим собственным значениям, собственные векторы, последовательно решая систему (3). Для $\lambda_1 = 1$ эта система будет:

$$\begin{Vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} ,$$

а учитывая, что ранг ее матрицы 2, имеем $\begin{cases} \phi_1 - 2\phi_2 - 2\phi_3 = 0, \\ \phi_2 = 0. \end{cases}$. Тогда в качестве собственного вектора можно взять $\| f_{(1)} \| = \begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

3) Поскольку условие задачи имеет вещественную форму собственные значения λ_2 и λ_3 комплексно сопряженные. По этой же причине (*есть такая теорема*) будут комплексно сопряженными и соответствующие собственные векторы. Поэтому для их нахождения достаточно решить систему (3) только с $\lambda_2 = i\sqrt{3}$.

В этом случае система (3) имеет вид:

$$\begin{cases} (1-i\sqrt{3})\,\phi_1 - 2\phi_2 & = 0, \\ \phi_2 + (1-i\sqrt{3})\,\phi_3 & = 0. \end{cases}$$

Конечно, эту систему можно решать методом исключения, однако удобнее просто принять, что $\phi_2 = 1 - i\sqrt{3}$. Тогда очевидно, что $\phi_1 = 2$ и $\phi_3 = -1$. В итоге получаем собственные векторы

$$\| f_{(2)} \| = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1-i\sqrt{3} \\ -1 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \| f_{(3)} \| = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1+i\sqrt{3} \\ -1 \end{Vmatrix} .$$

Причем здесь $\| f_{(3)} \|$. получается из $\| f_{(2)} \|$. комплексным сопряжением.

2. Решим теперь задачу, предполагая, что L^3 *вещественное* линейное пространство.

В этом случае, выполнив выкладки как в 2), получим, что $\hat{A}$ имеет только одно собственное значение $\lambda_1 = 1$ и, соответствующее ему, одномерное собственное подпространство, являющееся линейной оболочкой элемента $\left\| f_{(1)} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|$.

По свойству 3) линейного оператора в вещественном линейном конечномерном пространстве

каждое линейное преобразование $\hat{A}$ имеет либо хотя бы один собственный вектор, либо двумерное инвариантное подпространство.

Имеется теорема, о том, что таким инвариантным пространством является *линейная оболочка* $\operatorname{Re}\left\| f_{(2)} \right\| = \operatorname{Re}\begin{Vmatrix} 2 \\ 1-i\sqrt{3} \\ -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$ и $\operatorname{Im}\left\| f_{(2)} \right\| = \operatorname{Im}\begin{Vmatrix} 2 \\ 1-i\sqrt{3} \\ -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{Vmatrix}$ − вещественных элементов в L^3. Причем элементы $\operatorname{Re}\left\| f_{(2)} \right\|$ и $\operatorname{Im}\left\| f_{(2)} \right\|$ линейно независимые (*и такая теорема имеется*).

Итак, в рассматриваемой задаче линейное преобразование $\hat{A}$ имеет инвариантное подпространство

$$\begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix} + C_2 \begin{Vmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Пример 3. Найти в вещественном L^3 собственные значения и собственные векторы линейного преобразования $\hat{A}$, для которого в стандартном базисе

$$\|\hat{A}\| = \left\| \begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} \right\|.$$

Решение. 1) Составляем и решаем характеристическое уравнение (4)

$$\det \left\| \begin{matrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{matrix} \right\| = 0,$$

раскладывая по первой строке, получаем $(-1-\lambda)\cdot\det \left\| \begin{matrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{matrix} \right\| = 0$ или окончательно $\lambda(\lambda+1)^2 = 0$. Откуда собственные значения суть числа: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -1$.

2) Найдем, соответствующие этим собственным значениям, собственные векторы, последовательно решая систему (3). Для $\lambda_1 = 0$ система (3) :

$$\left\| \begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| , \quad \text{или же} \quad \begin{cases} \phi_1 & = 0, \\ \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 & = 0. \end{cases}$$

В качестве собственного вектора здесь можно взять $\left\| \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|$

3) Поскольку собственное значение -1 имеет кратность 2, то соответствующее ему собственное подпространство может оказаться как одномерным, так и двумерным.

Составляем систему (3) $\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \quad \Rightarrow \quad \{ \phi_2 - \phi_3 = 0$.

Для этой системы $n = 3$, а ранг ее основной матрицы равен 1. Следовательно, эта система будет иметь два линейно независимых (а, значит, и ненулевых) частных решения.

Принимая ϕ_2 за основную переменную, а ϕ_1 и ϕ_3 за свободные, находим эти решения

$$\| f_{(2)} \| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \| f_{(3)} \| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| .$$

Заметим, что эти собственные векторы могут служить базисом в собственном подпространстве преобразования $\hat{A}$, отвечающему собственному значению $\lambda = -1$.

Пример 4. В линейном пространстве квадратных матриц найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, ставящего в соответствие каждой такой матрице результат ее умножения справа на матрицу $\left\| \begin{matrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{matrix} \right\|$.

Решение. 1) Предварительно напомним, что данное пространство линейное конечномерное, размерности 4. Далее, результатом умножения любой квадратной матрицы 2-го порядка на любую фиксированную квадратную матрицу этого же порядка является опять же квадратная матрица 2-го порядка. Поэтому оператор $\hat{A}$ является преобразованием. (В качестве небольшого упражнения покажите, что это преобразование линейное.)

Таким образом, для нахождения собственных векторов и собственных оказывается возможным использование алгоритма, основанного на решении уравнения (4) и системы уравнений (3).

Для использования этого алгоритма требуется знать матрицу преобразования, которая, в свою очередь, зависит от базиса. Поскольку в условии задачи базис не задан, мы можем выбрать его, исходя из собственных предпочтений.

Напомним, что в 4-х мерном базисом может служить любой упорядоченный набор четырех линейно независимых элементов. Поскольку мы рассматриваем линейное пространство матриц размера 2×2, то этот набор может, например, иметь вид:

$$\left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \right\}.$$

Из очевидного равенства

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{Vmatrix} = \alpha_1 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + \alpha_2 \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + \alpha_3 \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} + \alpha_4 \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{5}$$

следует, что координатным представлением каждой матрицы размера 2×2 в нашем базисе будет служить 4-х компонентный столбец $\| \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \|^{\mathrm{T}}$.

Найдем теперь матрицу преобразования, указанного в условии задачи. Напомним, что матрицей линейного преобразования линейного 4-х мерного служит квадратная матрица размера 4×4, столбцы которой суть координатные представления образов базисных элементов.
В нашем случае образы базисных элементов определяются так:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -7 & -2 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

с координатным столбцом $\| -7 -2 \ \ 0 \ \ 0 \|^{\mathrm{T}}$

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 8 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

с координатным столбцом $\| \ 8 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0 \|^{\mathrm{T}}$

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ -7 & -2 \end{matrix} \right\|,$$

с координатным столбцом $\| \ 0 \ \ 0 -7 \ \ -2 \|^{\mathrm{T}}$

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 8 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

с координатным столбцом $\| \ 0 \ \ 0 \ \ 8 \ \ 1 \|^{\mathrm{T}}$

Из полученных координатных представлений формируем матрицу преобразования $\hat{A}$

$$\| \hat{A} \| = \left\| \begin{matrix} -7 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

2) Теперь составляем характеристическое уравнение (4). Оно имеет вид

$$\det\begin{Vmatrix} -7-\lambda & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = 0,$$

Применив правило разложения определителя по строке и использовав формулы сокращенного умножения, получим в итоге уравнение

$$(\lambda+3)^4 = 0\,.$$

Это означает, что указанное в условии преобразование имеет единственное собственное значение $\lambda_{1,2,3,4} = -3$ кратности 4.

Осталось найти собственные векторы. Система (3) при $\lambda = -3$ будет такова:

$$\left\| \begin{matrix} -4 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

или, в покомпонентной форме, $\begin{cases} -\phi_1 + 2\phi_2 = 0, \\ -\phi_3 + 2\phi_4 = 0. \end{cases}$

Приняв ϕ_2 и ϕ_3 за основные неизвестные, а ϕ_1 и ϕ_4 за свободные, получим два линейно независимых собственных вектора

$$\| f_{(1)} \| = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \| f_{(2)} \| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\| ,$$

которые образуют базис *двумерного* собственного подпространства оператора $\hat{A}$, отвечающего собственному значению $\lambda = -3$ *кратности* 4.

В заключение заметим, что мы нашли собственные векторы в форме их координатных представлений. Сами собственные векторы (если учесть равенство (5)) суть матрицы 2-го порядка $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

Ради любопытства проверим, что эти матрицы удовлетворяют определению (1).

Верны равенства

$$\hat{A} f = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -6 & -3 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = -3 \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \lambda f .$$

Левый конец этой цепочки есть результат действия оператора на собственный вектор, а правый конец − умножение на него собственного значения.