СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Определение

Пусть линейный оператор $\hat{A}$, действует в линейном пространстве L и имеет значения в этом же пространстве. Иначе говоря, образы и прообразы для $\hat{A}$ принадлежат L, т.е. $\hat{A}$ есть линейное преобразование пространства L. Тогда

> *Собственным вектором* линейного оператора (преобразования) $\hat{A}$, отвечающему *собственному значению* λ, называется ненулевой элемент $f \in L$ такой, что $$\hat{A} f = \lambda f . \qquad (1)$$

Итак, f это ненулевой элемент пространства L, образ которого при действии на него $\hat{A}$, есть произведение числа λ (вообще говоря, комплексного) на этот же элемент f.

В общем случае универсальных способов описания или нахождения собственных векторов и собственных значений нет. Для их нахождения приходится использовать свойства конкретного линейного пространства и линейного преобразования.

Например, для оператора дифференцирования $\hat{A} = \frac{d}{dx}$, действующего в линейном пространстве бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$, равенство (1) принимает вид дифференциального уравнения $\frac{df}{dx} = \lambda f$.

Собственным вектором в этом случае является каждое не равное тождественно нулю решение этого уравнения, т.е *функция* вида $f(x) = Ce^{\lambda x} \quad \forall C \neq 0$.

Данный пример иллюстрирует тот факт, что слово "вектор" в термине "собственный вектор" есть лишь дань исторически сложившейся традиции. Собственное значение в данном примере есть любое комплексное число.

Укажем важные свойства собственных векторов, вытекающих из определения (1):

\

1) совокупность *всех* собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению (и дополненная нулевым элементом) является *инвариантным подпространством* преобразования $\hat{A}$, называемого *собственным* подпространством;
2) собственные векторы отвечающие *различным* собственным значениям, *линейно независимы.*

Уточним: подпространство $\Omega \subseteq \Lambda$ называется инвариантным для линейного оператора $\hat{A}$, если $\hat{A}x \in \Omega \quad \forall x \in \Omega$.

Случай конечномерного пространства

Хотя универсального "рецепта" нахождения собственных векторов нет, приятным исключением оказывается случай, когда пространство $L = L^n$ конечномерное, т.е. в нем существует базис.

Напомним важные теоремы о свойствах конечномерного пространства:

1) каждый элемент в L^n (в конкретном базисе) полностью и однозначно описывается своим координатным столбцом, в том числе, верно: $a = b \quad \Leftrightarrow \quad \| a \| = \| b \|$;
2) операции с элементами L^n в координатном представлении выполняются по правилам действий с матрицами, для нас важно, что $\| \lambda f \| = \lambda \| f \|$;
3) каждое линейное преобразование $\hat{A}$, имеет координатное представление в виде $\| \hat{A} \|$ − квадратной матрицы n-го порядка, столбцами которой являются координатные столбцы *образов базисных векторов*.
4) для координатного представления образа любого элемента $x \in L^n$, т.е. $\| \hat{A} x \|$, верно равенство $\| \hat{A} x \| = \| \hat{A} \| \| x \|$.

Это позволяет условие (1) записать в виде:

$$\|\hat{A}\|\|f\| = \lambda\|f\| \qquad \Rightarrow \qquad \|\hat{A}\|\|f\| - \lambda\|\hat{E}\|\|f\| = \|o\| \ ,$$

или же, как

$$\|\hat{A} - \lambda\hat{E}\|\|f\| = \|o\| \ , \tag{2}$$

где $\hat{E}$ − единичный (тождественный) оператор, а $\|o\|$ − нулевой столбец, т.е. координатное представление нулевого элемента $o \in L^n$.

Рассмотрим теперь (2) в развернутом виде.

$$\text{Пусть} \quad \left\| \hat{A} \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| f \right\| = \left\| \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_n \end{matrix} \right\|.$$

Тогда равенство (2) запишется так:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \right\| \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\alpha_{11}-\lambda)\,\phi_1 + \alpha_{12}\phi_2 + \dots + \alpha_{1n}\phi_n = 0, \\ \alpha_{21}\,\phi_1 + (\alpha_{22}-\lambda)\,\phi_2 + \dots + \alpha_{2n}\phi_n = 0, \\ \dots \\ \alpha_{n1}\,\phi_1 + \alpha_{n2}\phi_2 + \dots + (\alpha_{nn}-\lambda)\,\phi_n = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) состоит из n *нелинейных* уравнений с $n+1$ неизвестным, решить которую можно алгоритмом, использующим специфику ее вида.

Идея этого алгоритма состоит в том, что, если в (3) неизвестную λ принять за *параметр* (мы, как бы считаем λ известной, но могущей иметь разные значения, величиной), то относительно компонент столбца $\| f \|$ система (3) оказывается *линейной и однородной*, с основной квадратной матрицей $\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \|$ порядка n.

Из теоремы Крамера следует, что при λ, удовлетворяющих условию

$$\det \| \hat{A} - \lambda \hat{E} \| \neq 0$$

решение системы (3) существует и единственно.

С другой стороны, очевидно, что (3) имеет решение $\phi_1 = \phi_2 = \ldots = \phi_n = 0$, которое не может быть решением исходной задачи, поскольку собственный вектор *ненулевой по определению*.

Рассмотрим остающийся случай $\det\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\| = 0$. Тут теорема Крамера ничем помочь не может, поэтому воспользуемся другой известной теоремой о том, что максимальное число линейно независимых частных решений линейной однородной системы (3) равно $n - r$, где r − ранг основной матрицы этой системы.

Откуда следует, что для существования собственного вектора необходимо выполнение неравенства $n - r \geq 1$. Т.е. нам нужно, чтобы $\mathrm{rg}\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\| \leq n - 1$.

Ранг квадратной матрицы порядка n не может быть больше, чем n, и поэтому данное условие выполнится, если $\det\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\| = 0$, поскольку матрица $\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\|$ имеет *единственны*й минор n-го порядка , равный ее детерминанту.

Откуда следует, что, выбор λ так, чтобы

$$\det\|\hat{A}-\lambda\,\hat{E}\|=0\ , \tag{4}$$

обеспечивает существование решения системы (3) с, не равными нулю одновременно, компонентами $\|f\|$. Значит,

> в любом *конечномерном* пространстве задача отыскания собственных векторов и собственных значений сводится к решению уравнения (4) и последовательному (отдельно для *каждого* найденного λ) решению системы (3).

Дадим определение:

> *Собственным подпространством* линейного преобразования $\hat{A}$ для *собственного значения* λ, называется совокупность *всех* собственных векторов, отвечающих этому λ, дополненная нулевым элементом.

В конечномерном линейном пространстве L^n собственные векторы и собственные значения линейного преобразования $\hat{A}$ обладают следующими свойствами.

1) Уравнение (4) есть алгебраическое уравнение n-го порядка, вид и решения которого *одинаковы в любом базисе* L^n. Это уравнение принято называть *характеристическим.*

2) В комплексном линейном пространстве L^n каждое линейное преобразование $\hat{A}$ имеет *хотя бы один* собственный вектор;

3) В вещественном линейном пространстве L^n каждое линейное преобразование $\hat{A}$ имеет либо *хотя бы один собственный вектор*, либо *двумерное инвариантное подпространство*;

4) *Размерность* собственного подпространства Ω_λ, отвечающего λ − корню характеристического уравнения кратности k, не меньше, чем 1 и не больше, чем k. То есть $1 \le \dim(\Omega_\lambda) \le k$.

5) Матрица линейного преобразования $\hat{A}$ в базисе *из собственных векторов* этого преобразования (в случае, когда такой базис существует) имеет *диагональный* вид, причем на ее главной диагонали расположены собственные значения $\hat{A}$.

Замечание о важности собственных векторов

Доказательство свойства 5)

Допустим, что для некоторого линейного преобразования $\hat{A}$, заданного в Λ^n, удалось найти n линейно независимых собственных векторов $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, для которых выполнены равенства

$$\hat{A}g_1 = \lambda_1 g_1 \ ; \quad \hat{A}g_2 = \lambda_2 g_2 \ ; \ldots ; \quad \hat{A}g_n = \lambda_n g_n \ .$$

Если принять набор элементов $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ за базис, то данные соотношения можно рассматривать как координатные разложения *образов базисных элементов*:

$$\hat{A}g_k = 0 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2 + \ldots + \lambda_k g_k + \ldots + 0 \cdot g_n \ ; \ \forall k = [1, n] \, .$$

Поскольку эти разложения *единственны*, то, исходя из определения *матрицы линейного преобразования*, можно утверждать, что матрица линейного преобразования $\hat{A}$ в этом базисе будет иметь *диагональный* вид:

$$\| \hat{A} \|_f = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix},$$

благодаря чему исследование свойств $\hat{A}$ существенно упрощается.