Действия с линейными операторами в матричной форме

Будем рассматривать далее операторы вида $\hat{A}:\Lambda^n \to \Lambda^n$, то есть линейные *преобразования*, действующие в Λ^n с базисом $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$, матрица которых квадратная, порядка n. Введенные ранее операции с матрицами позволяют описать в конкретном базисе действия с линейными операторами в следующей форме.

$1°$. Сравнение операторов: $\hat{A} = \hat{B} \iff \| \hat{A} \|_g = \| \hat{B} \|_g$.

$2°$. Сложение операторов: $\|\hat{A} + \hat{B}\|_g = \|\hat{A}\|_g + \|\hat{B}\|_g$.

$3°$. Умножение оператора на число: $\| \lambda \hat{A} \|_g = \lambda \| \hat{A} \|_g$.

$4°$. Произведение операторов: $\|\hat{A}\hat{B}\|_g = \|\hat{A}\|_g \|\hat{B}\|_g$.

$5°$. Обращение операторов: $\|\hat{A}^{-1}\|_g = \|\hat{A}\|_g^{-1}$.

Следствие. **Размерность линейного пространства линейных отображений вида $\Lambda^n \to \Lambda^m$ равна $m \times n$.**

Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса

Выясним, как меняется $\|\hat{A}\|_{fg}$ – матрица линейного отображения $\hat{A}:\Lambda^n \to \Lambda^m$ при замене базисов. Пусть в Λ^n даны два базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$, связанные матрицей перехода $\|G\|$, а в Λ^m – два базиса $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ и $\{f'_1, f'_2, ..., f'_m\}$ с матрицей перехода $\|F\|$. Найдем соотношение, связывающее $\|\hat{A}\|_{fg}$ и $\|\hat{A}\|_{f'g'}$.

В этом случае справедлива

Теорема **Матрица линейного оператора $\|\hat{A}\|_{f'g'}$ в базисах $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$ и $\{f'_1, f'_2, ..., f'_m\}$ связана с матрицей этого же оператора $\|\hat{A}\|_{fg}$ в базисах $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ соотношением**

$$\|\hat{A}\|_{f'g'} = \|F\|^{-1}\|\hat{A}\|_{fg}\|G\|.$$

Следствия

Матрица линейного преобразования при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\}$ в Λ^n изменяется по правилу

$$\| \hat{A} \|_{g'} = \| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \| .$$

Определитель матрицы линейного *преобразования* не зависит от выбора базиса в Λ^n.

Действительно из $\det \| \hat{A} \|_{g'} = \det (\| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \|)$, силу

$$\det (\| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \|) = (\det \| S \|^{-1})(\det \| \hat{A} \|_g)(\det \| S \|) \quad \text{и} \quad \det \| S \|^{-1} = \frac{1}{\det \| S \|}, \text{ где } \det \| S \| \neq 0 ,$$

получаем, что $\det \| \hat{A} \|_{g'} = \det \| \hat{A} \|_g$.

Область значений и ядро линейного оператора

Трактуя линейный оператор, действующий в линейном пространстве как некоторое обобщение понятия функции, естественно рассмотреть вопрос об области определения и области значений линейных операторов.

Под *областью значений линейного оператора* $\hat{A}$ будем понимать множество образов *всех* элементов $x \in \Lambda$, то есть элементов вида $\hat{A}x$. В этом случае очевидно, что для любого линейного оператора его область определения совпадает с Λ.

Ответ на вопрос: “*Что представляет собой область значений линейного оператора*?” дает

Теорема **Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в линейном пространстве Λ. Тогда**

1°. Множество элементов $\hat{A}x \ \forall x \in \Lambda$ есть подпространство в Λ.

2°. Если, кроме того, $\Lambda = \Lambda^n$ с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, то размерность этого подпространства равна $\operatorname{rg} \| \hat{A} \|_g$.

Следствие **Размерность области значений линейного оператора $\hat{A}$, действующего на некотором подпространстве линейного пространства $\Lambda^* \subseteq \Lambda$, не превосходит $\dim(\Lambda^*)$.**

Другой важной характеристикой линейного оператора является совокупность элементов линейного пространства Λ, называемая *ядром* линейного оператора и обозначаемая $\ker\hat{A}$.

4
Определение *Ядро* линейного оператора $\hat{A}$ состоит из элементов $x \in \Lambda$, таких, что $\hat{A}x = o$.

Теорема **Если $\Lambda = \Lambda^n$ и $\operatorname{rg}\hat{A} = r$, то $\ker\hat{A}$ есть подпространство и $\dim(\ker\hat{A}) = n - r$.**

Задача 07. Пусть в базисах $\left\{ e_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad e_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad e_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad e_4 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \right\} \subset \Lambda^4$ и $\left\{ g_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad g_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad g_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \right\} \subset \Lambda^3$ матрица линейного отображения $\Lambda^4 \xrightarrow{\hat{A}} \Lambda^3$ имеет вид $\| \hat{A} \|_{ge} = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$.

Требуется найти *базисы* как в *ядре*, так и в *области значений* данного линейного отображения $\hat{A}$.

Решение: 1) По определению ядром линейного оператора $\hat{A}$ является совокупность всех элементов $x \in \Lambda$ таких, что $\hat{A}x = o$. Причем в конечномерном пространстве это уравнение может быть записано в матричном виде $\|\hat{A}\|\|x\| = \|o\|$, который для решаемой задачи будет

$$\left\|\begin{matrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\| \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \xi_1 - 3\xi_2 + \xi_4 = 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = 0, \\ -2\xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 = 0. \end{cases}$$

Общее решение последней однородной системы линейных уравнений имеет вид

$$\left\|\begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{matrix}\right\| = \lambda_1 \left\|\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{matrix}\right\| + \lambda_2 \left\|\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right\| \quad \forall \lambda_1, \lambda_2$$

и является *описанием ядра,* отображения, заданного в условии задачи .

Как известно, это ядро есть линейное пространство. Базисом в ядре в этом случае может служить фундаментальная система решений, например, пара элементов

$$\left\{ \left\|\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right\| \right\}.$$

2) Множество значений линейного отображения согласно определению имеет вид $y = \hat{A}x \quad \forall x \in \Lambda$. В конечномерном случае это равенство принимает вид $\| y \| = \| \hat{A} \| \| x \|$, что для решаемой задачи приводит к системе линейных уравнений

$$\begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Vmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \xi_1 - 3\xi_2 \qquad + \xi_4 = \eta_1, \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = \eta_2, \\ \quad - 2\xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 = \eta_3. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Здесь $\begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix}$ - координатное представление произвольного элемента $y \in \Lambda^3$.

Теперь заметим, что множеством значений преобразования $\hat{A}$ является совокупность всех тех $y \in \Lambda^3$, для которых система (I) совместна. Эту совокупность найдем, использовав теорему Кронекера-Капелли.

Предварительно приведем последовательными *элементарными* преобразованиями расширенную матрицу системы (I) к упрощенному виду. Для этого достаточно из третьей строки вычесть сумму первых двух и записать результат на место третьей. Получим

$$\left\|\begin{array}{rrrr|c} 1 & -3 & 0 & 1 & \eta_1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \eta_2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & \eta_3 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & 1 & \eta_1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_1-\eta_2+\eta_3 \end{array}\right\|$$

Поскольку элементарные преобразования не меняют рангов матриц, то очевидно, что ранг основной матрицы системы (I) будет равен рангу расширенной, если $-\eta_1-\eta_2+\eta_3=0$. А это по теореме Кронекера_Капелли означает совместность системы (I).

Последнее равенство задает искомое множество значений линейного оператора $\hat{A}$. Его можно рассматривать как однородную систему, состоящую из одного уравнения с тремя неизвестными, общее решение которой имеет вид

$$\left\|\begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{array}\right\| = \mu_1 \left\|\begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right\| + \mu_2 \left\|\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right\| \quad \forall \mu_1, \mu_2 \ .$$

Ее фундаментальную систему решений (например, столбцы $\left\|\begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right\|$ и $\left\|\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right\|$) можно принять за базис во множестве значений линейного отображения $\hat{A}$.

При решении задач следует учитывать, что в конечномерном случае и выбранном базисе матрица линейного оператора существует и единственна. Поэтом для ее построения можно использовать *любой* метод, вплоть до подбора.

Например, пусть в Λ^4 линейное преобразование $\hat{A}$ переводит четыре линейно независимых элемента $\{ x_1, x_2, x_3, x_4 \}$ соответственно в четыре произвольных элемента $\{ y_1, y_2, y_3, y_4 \}$.

Построим матрицы $\|X\|$ и $\|Y\|$ так, что столбцами матрицы $\|X\|$ являются координатные представления элементов $\{ x_1, x_2, x_3, x_4 \}$ в некотором (например, стандартном) базисе, а столбцами матрицы $\|Y\|$ − координатные представления элементов $\{ y_1, y_2, y_3, y_4 \}$.

Тогда, исходя из определения произведения матриц, можно показать, что в этом базисе матрица преобразования $\|\hat{A}\|$ должна удовлетворять равенствам

$$\|Y\| = \|\hat{A}\|\|X\| \quad \text{или} \quad \|\hat{A}\| = \|Y\|\|X\|^{-1}.$$

Произведение $\|Y\|\|X\|^{-1}$ удобно вычислять по следующей схеме:

1) Составляем объединенную матрицу $\|Y|X\|$.
2) *Правую* подматрицу в $\|Y|X\|$ некоторым набором элементарных преобразований приводим к *единичной*.
3) Одновременно *левую* подматрицу в $\|Y|X\|$ изменяем *тем же* набором элементарных преобразований.

Тогда на месте *левой* подматрицы оказывается искомая матрица преобразования $\hat{A}$, определяемая равенством $\|\hat{A}\| = \|Y\|\|X\|^{-1}$.

Типы линейных отображений

Как уже было отмечено, в тех случаях, когда область значений оператора не принадлежит области определения, следует говорить об отображении.Для отображений также выделяются специальные случаи так называемых *биективных*, *инъективных* и *сюръективных* отображений. Рассмотрим эти случаи подробнее.

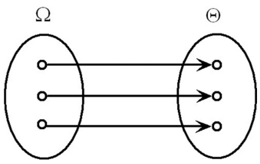
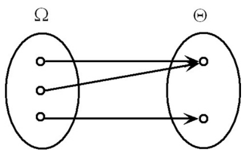
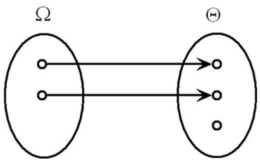
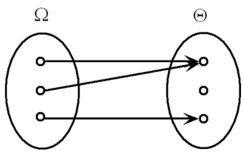
Определение Отображение $y = \hat{A}x\ ,\quad x \in \Omega,\quad y \in \Theta$ множества Ω в множество Θ называется *инъективным* (или *инъекцией*), если из условия $\hat{A}x_1 = \hat{A}x_2$ вытекает

$$x_1 = x_2\ ,\quad x_1, x_2 \in \Omega\ .$$

Отображение $y = \hat{A}x\ ,\quad x \in \Omega,\ y \in \Theta$ множества Ω на множество Θ называется *сюръективным* (или *сюръекцией*), если каждый элемент из Θ имеет прообраз в Ω.

Наконец, отображение, являющееся одновременно и инъективным и сюръективным, будет *взаимно однозначным*, или *биекцией*.

Примеры отображений различных типов

Тип отображения	Инъективное	Неинъективное
Сюрьективное		
Несюрьективное		

В случае инъекции множество всех значений оператора $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega$, $y \in \Theta$ может не совпадать с Θ .

В случае сюръекции прообраз любого элемента из Θ всегда существует в Ω, но, вообще говоря, он не единственен

Отметим также, что в конечномерном случае сюръективность отображения $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$ означает выполнение условия $\Theta = \Lambda^m$, а инъективность – условия $\ker \hat{A} = \{ o \}$. Альтернативную форму условий инъективности и сюръективности в конечномерном случае дает

Теорема **Ранг матрицы линейного оператора, являющегося сюръективным отображением, равен числу ее строк, а ранг матрицы инъективного отображения равен числу ее столбцов.**

Иными словами, для $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$ инъективность равносильна выполнению равенств $\operatorname{rg} \| \hat{A} \|_{fg} = \dim(\Lambda^n) = n$, а сюръективность $\operatorname{rg} \| \hat{A} \|_{fg} = \dim(\Lambda^m) = m$.

Задача 08. Линейное отображение $\hat{A}:\ \Lambda^3 \to \Lambda^3$ в некотором базисе задано матрицей $\left\|\hat{A}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{matrix}\right\|$. Найти его ядро и множество значений. Выяснить, является ли данное отображение инъективным или сюръективным.

Решение. 1°. Пусть $\|x\| = \left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{matrix}\right\|$ и $\|y\| = \left\|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{matrix}\right\|$ – координатные представления соответственно прообраза и образа оператора $y = \hat{A}x$. Тогда ядро – множество элементов x, таких, что $\hat{A}x = o$, задается в координатном представлении системой линейных уравнений

$$\|\hat{A}\|\|x\| = \|o\| \quad \text{или} \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ 3\xi_1 + 5\xi_2 + 7\xi_3 = 0, \end{cases}$$

общее решение которой есть

$$\left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{matrix}\right\| = \lambda \left\|\begin{matrix}1\\ -2\\ 1\end{matrix}\right\|.$$

Отсюда заключаем, что ядро линейного отображения $\hat{A}$ есть линейная оболочка элемента $\left\|\begin{matrix}1\\ -2\\ 1\end{matrix}\right\|$, и поскольку оно не состоит только из нулевого элемента, то данное отображение *неинъективное*.

К этому же заключению можно прийти, приняв во внимание, что $\mathrm{rg}\left\|\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 7\end{matrix}\right\| = \mathrm{rg}\left\|\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\| = 2 < 3$ – числа столбцов матрицы отображения.

2°. Область значений линейного отображения $\hat{A}$ состоит из элементов $y \in \Theta$, таких, что $y = \hat{A}x \ \forall x \in \Omega$. В координатной форме принадлежность элемента y ко множеству значений означает совместность системы линейных уравнений

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix}\right\|,$$

следовательно, нам необходимо выяснить, при каких значениях η_1, η_2, η_3 данная система линейных уравнений совместна. Это можно сделать, например, при помощи теоремы *Кронекера–Капелли*, сравнив ранги основной и расширенной матриц данной системы. Затем из условия

$$\operatorname{rg}\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix}\right\| = \operatorname{rg}\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \eta_1 \\ 2\eta_1 - \eta_2 \\ -\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 \end{matrix}\right\| = \operatorname{rg}\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{matrix}\right\| = 2$$

найдем, что для совместности необходимо и достаточно, чтобы $\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 0$, что, в свою очередь, означает, что множество значений отображения $\hat{A}$ состоит из элементов вида

$$\left\|\begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix}\right\| = \lambda_1 \left\|\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right\| + \lambda_2 \left\|\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\| \quad \forall \lambda_1, \lambda_2,$$

являющихся решениями уравнения $\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 0$.

Заметим, наконец, что поскольку не каждый элемент $y \in \Theta = \Lambda^3$ имеет прообраз в $\Omega = \Lambda^3$, то данное отображение не является и *сюръективным*.

В заключение рассмотрим простой, но важный для практики частный случай линейного отображения вида $\hat{A}:\{\Lambda \xrightarrow{\hat{A}} \Lambda^1\}$. Здесь результат действия $\hat{A}$ на элемент $x \in \Lambda$ естественно обозначить функционально, как $f(x)$, т.е. $\hat{A}x = f(x)$.

Такого вида зависимость называют *линейной функцией*, *линейным функционалом* или *линейной формой*, поскольку при этом множество значений *числовое*.

Важно помнить, что в конечномерном случае, т.е. при $\Lambda = \Lambda^n$, матрица преобразования $\hat{A}$ имеет, в силу формулы (1), размер $1 \times n$, т.е. является $n-$компонентной *строкой*. Это вытекает из нашего (сделанного ранее) выбора $n-$компонентного *столбца* как координатного представления элемента пространства .

Формула для нахождения значений линейной формы $f(x) \in \mathbf{R} \quad x \in \Lambda^n$ в Λ^n является обычной линейной функцией от n числовых переменных. Действительно, пусть в базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\} \in \Lambda^n$ координатный столбец $\| x \|_g = \| \ \xi_1 \ \xi_2 \ \ldots \ \xi_n \ \|^{\mathrm{T}}$, а значения формы на базисных элементах $\phi_k = f(g_k) \ k = [1, n]$, что дает $\| \hat{A} \|_g = \| f \|_g = \| \ \phi_1 \ \phi_2 \ \ldots \ \phi_n \ \|$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k \xi_k = \| f \|_g^{\mathrm{T}} \| x \|_g .$$

Задача 9: Пусть Λ^n линейное пространство алгебраических многочленов $x = P_4(\tau) = \xi_1 + \xi_2 \tau + \xi_3 \tau^2 + \xi_4 \tau^3$ степени не выше, чем 3, с базисом вида $\{ \ g_1(\tau) = 1, \ g_2(\tau) = \tau, \ g_3(\tau) = \tau^2, \ g_4(\tau) = \tau^3 \}$, а линейная форма есть определенный интеграл от многочлена в пределах от 0 до 1. Найти координатное представление этой формы в данном базисе.

Решение: в нашем случае $f(x)=\int\limits_0^1 P_4(\tau)\,d\tau$, а искомое координатное представление линейного оператора $\hat{A}:\{\ \Lambda^4 \to \Lambda^1\ \}$ есть четырех компонентная строка вида

$$\| f \|_g = \| \ f(P_4(g_1(\tau))) \quad f(P_4(g_2(\tau))) \quad f(P_4(g_3(\tau))) \quad f(P_4(g_4(\tau))) \ \|.$$

Конкретно

$$f(P_4(g_1(\tau))) = \int\limits_0^1 1\cdot d\tau = 1\,,$$

$$f(P_4(g_2(\tau))) = \int\limits_0^1 \tau\, d\tau = \frac{1}{2}\,,$$

$$f(P_4(g_2(\tau))) = \int\limits_0^1 \tau^2 d\tau = \frac{1}{3}\,,$$

$$f(P_4(g_2(\tau))) = \int\limits_0^1 \tau^3 d\tau = \frac{1}{4}\,.$$

Откуда следует ответ задачи: $\| f \|_g = \left\| \ 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \ \right\|.$

Заметим, что как частный случай, следующий из сделанных ранее утверждений, множество *всех* линейных форм в Λ^n само по себе является линейным n-мерным пространством. Это пространство Λ^{n^*} принято называть *сопряженным* (или *двойственным*) к пространству Λ^n.

При этом еще раз обратим внимание, что в пространстве Λ^n линейная форма (функционал) в координатах представляется *строкой*, а в пространстве Λ^{n^*} тот же функционал, естественно, изображается в координатах *столбцом*.

Наконец, представляется естественным рассмотреть множество линейных функционалов, определенных (действующих) в пространстве Λ^{n^*}.

Эти функционалы образуют линейное n-мерное пространство $\Lambda^{n^{**}}$. Это пространство естественно назвать *повторно-сопряженным* (или *повторно-двойственным*) к исходному линейному пространству Λ^n.

Вполне очевидно, что пространства Λ^n, Λ^{n^*} и $\Lambda^{n^{**}}$ изоморфны друг другу как пространства одинаковой размерности.

Однако, без доказательства, отметим, что, кроме того, между $\Lambda^{n^{**}}$ и Λ^n существует *специальный тождественный* изоморфизм, позволяющий считать $\Lambda^{n^{**}}$ и Λ^n *одним и тем же* множеством. Иначе говоря, линейное пространство, сопряженное (двойственное) к Λ^{n^*} − сопряженному (двойственному) для Λ^n (то есть, *сопряженное к сопряженному*), есть *исходное* линейное пространство Λ^n.