Линейные зависимости в линейном пространстве

Определение Пусть каждому элементу x линейного пространства Λ поставлен в соответствие единственный элемент y линейного пространства Λ^*. Тогда говорят, что в Λ задан *оператор*, действующий в Λ и имеющий значения в Λ^*, действие которого обозначается как $y = \hat{A}x$.
При этом элемент y называется *образом элемента* x, а элемент x – *прообразом элемента* y.

Операторы принято подразделять на *отображения*, если $\Lambda^* \not\subset \Lambda$, и *преобразования*, если $\Lambda^* \subseteq \Lambda$.

В дальнейшем, за исключением особо оговоренных случаев, будет предполагаться, что из контекста ясно, идет ли речь об отображении или о преобразовании.

Определение Оператор $y = \hat{A}x$ называется *линейным*, если для любых $x, x_1, x_2 \in \Lambda$ и любого числа λ имеют место равенства
1°. $\hat{A}(x_1 + x_2) = \hat{A}x_1 + \hat{A}x_2$ и
2°. $\hat{A}(\lambda x) = \lambda \hat{A}x$.

Примеры

1°. В пространстве 2-мерных векторов линейным оператором является правило

$$\left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\|,$$

связывающее вектор-прообраз $x = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\|$ с вектором-образом $y = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix} \right\|$.

2°. В пространстве бесконечно дифференцируемых функций линейным оператором является операция *дифференцирования*, ставящая в соответствие каждому элементу этого пространства его *производную функцию*.

3°. В пространстве *непрерывных функций* $f(\tau)$ *линейным оператором является операция* умножения непрерывной функции на независимую переменную τ .

Задача 01 *Является ли линейным оператор $\hat{A}$, ставящий каждому элементу $x \in \Lambda$ в соответствие фиксированный элемент $a \in \Lambda$?*

Решение. Если элемент $a = o$, то $\hat{A}$ – линейный оператор.

Действительно, если оператор $\hat{A}$ линейный, то, с одной стороны, $\forall x, y \in \Lambda$

$$\hat{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}x + \mu \hat{A}y = \lambda a + \mu a = (\lambda + \mu)a,$$

но, с другой,

$$\forall \lambda, \mu : \hat{A}(\lambda x + \mu y) = a \qquad \Rightarrow \qquad a = (\lambda + \mu)a \qquad \Rightarrow \qquad a = o.$$

Действия с линейными операторами

Определение Линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называются *равными* (что обозначается как $\hat{A}=\hat{B}$), если

$$\forall x \in \Lambda : \quad \hat{A}x = \hat{B}x .$$

Суммой линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор $\hat{C}$, обозначаемый $\hat{A}+\hat{B}$, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\hat{A}x+\hat{B}x$.

Лемма **Сумма двух линейных операторов является линейным оператором.**

Определение *Нулевым* оператором $\hat{O}$ называется оператор, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие нулевой элемент этого линейного пространства.

Определение *Оператором, противоположным оператору* $\hat{A}$*, называется оператор, обозначаемый* $-\hat{A}$*, ставящий каждому* x *элементу линейного пространства* Λ *в соответствие элемент* $-(\hat{A}x)$.

Из решения задачи 01 следует, что нулевой оператор линейный. Также можно показать, что оператор противоположный любому линейному оператору также линейный.

Лемма

Для любых линейных операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ выполняются соотношения

$$\hat{A}+\hat{B}=\hat{B}+\hat{A};$$
$$(\hat{A}+\hat{B})+\hat{C}=\hat{A}+(\hat{B}+\hat{C});$$
$$\hat{A}+\hat{O}=\hat{A};\ \hat{A}+(-\hat{A})=\hat{O}.$$

Определение

Произведением числа λ на линейный оператор $\hat{A}$ называется оператор, обозначаемый $\lambda\hat{A}$, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\lambda(\hat{A}x)$.

Лемма

Произведение числа на линейный оператор является линейным оператором, для которого выполняются соотношения

$$\alpha(\beta\hat{A})=(\alpha\beta)\hat{A}\ ;\quad 1\hat{A}=\hat{A}\ ;$$
$$(\alpha+\beta)\hat{A}=\alpha\hat{A}+\beta\hat{A}\ ;$$
$$\alpha(\hat{A}+\hat{B})=\alpha\hat{A}+\alpha\hat{B}\ .$$

Теорема

Множество всех линейных операторов, действующих в линейном пространстве Λ, является линейным пространством.

Определение *Произведением* линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор, обозначаемый $\hat{A}\hat{B}$, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\hat{A}(\hat{B}x)$.

Теорема **Произведение линейных операторов является линейным оператором, для которого справедливы соотношения**

$$\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C}\ ; \quad \hat{A}(\hat{B}+\hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C};$$
$$(\hat{A}+\hat{B})\hat{C} = \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C}.$$

В общем случае произведение линейных операторов не обладает *перестановочным свойством* (или, иначе говоря, *операторы не коммутируют*), то есть $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$.

Определение Оператор $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ называется *коммутатором* операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Коммутатор коммутирующих операторов есть *нулевой* оператор.

Задача 04 *В линейном пространстве алгебраических многочленов* $P_n(\tau)=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k$ *найти коммутатор для операторов*: $\hat{A}$, *ставящего в соответствие многочлену его производную функцию, и* $\hat{B}$ *– оператора умножения многочлена на независимую переменную.*

Решение. Построим оператор $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$. Для любого $P_n(\tau)$ имеем

$$\hat{A}P_n(\tau)=\frac{d}{d\tau}P_n(\tau)=\frac{d}{d\tau}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k\Big)=\sum_{k=1}^{n}k\,\alpha_k\tau^{k-1},$$

$$\hat{B}P_n(\tau)=\tau\,\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k\Big)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^{k+1}.$$

Откуда получаем

$$\hat{B}(\hat{A}P_n(\tau))=\tau\,\Big(\sum_{k=1}^{n}k\,\alpha_k\tau^{k-1}\Big)=\sum_{k=1}^{n}k\,\alpha_k\tau^k=\sum_{k=0}^{n}k\,\alpha_k\tau^k,$$

$$\hat{A}(\hat{B}P_n(\tau))=\frac{d}{d\tau}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^{k+1}\Big)=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha_k\tau^k,$$

$$(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})P_n(\tau)=\Big(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha_k\tau^k\Big)-\Big(\sum_{k=0}^{n}k\,\alpha_k\tau^k\Big)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k=P_n(\tau).$$

Следовательно, данные линейные операторы *не коммутируют*.

В задаче 04 оказалось, что действие оператора $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ на любой элемент линейного пространства многочленов не приводит к изменению этого элемента. Введем для такого оператора специальное наименование.

Определение

Оператор $\hat{E}$ называется *единичным* (или *тождественным*) оператором, если каждому элементу x линейного пространства Λ он ставит в соответствие тот же самый элемент, то есть

$$\hat{E}x = x \quad \forall x \in \Lambda .$$

Имеют место соотношения: $\hat{A}\hat{E} = \hat{E}\hat{A} = \hat{A} \quad \forall \hat{A}$, а также линейность и единственность $\hat{E}$.

Определение

Оператор $\hat{B}$ называется *обратным* для линейного оператора $\hat{A}$ (который обозначается как $\hat{A}^{-1}$), если $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{E}$.

Пример

В линейном пространстве функций $f(\tau)$, имеющих на $[\alpha,\beta]$ производную любого порядка и удовлетворяющих условиям $f^{(k)}(\alpha)=0$; $k = 0,1,2,\ldots$, оператор дифференцирования $\hat{A}f = \dfrac{df}{d\tau}$ и $\hat{B}f = \int\limits_{\alpha}^{\tau} f(\sigma)d\sigma$ − оператор интегрирования с переменным верхним пределом являются взаимно обратными.

Действительно,

$$\hat{A}\hat{B}f = \frac{d}{d\tau}\int\limits_{\alpha}^{\tau} f(\sigma)d\sigma = f(\tau) = \hat{E}f \quad \text{и} \quad \hat{B}\hat{A}f = \int\limits_{\alpha}^{\tau} \frac{df}{d\sigma}d\sigma = f(\tau) - f(a) = f(\tau) = \hat{E}f \ .$$

Замечания.

1°. Не для всякого линейного оператора существует обратный оператор. Например, нулевой оператор $\hat{O}$ не имеет обратного. Действительно, пусть $\hat{O}x = o$ при всех $\forall x \in \Lambda$, тогда для любого $\hat{B}$ имеет место

$$(\hat{B}\hat{O})x = \hat{B}(\hat{O}x) = o \quad \forall x \in \Lambda ,$$

и, следовательно, равенство $\hat{B}\hat{O} = \hat{E}$ не выполняется ни при каком $\hat{B}$.

2°. Обратный оператор, если существует, то только единственный.

3°. В случае бесконечномерного линейного пространства из справедливости условия $\hat{A}\hat{B} = \hat{E}$ может не следовать выполнение условия $\hat{B}\hat{A} = \hat{E}$.

Это имеет место, например, в пространстве многочленов

$$P_n(\tau) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \tau^k$$

для пары операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, где $\hat{B}$ есть оператор умножения многочлена на независимую переменную, а оператор $\hat{A}$ многочлену $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \tau^k$ ставит в соответствие многочлен $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \tau^{k-1}$.

Координатное представление линейных операторов

Пусть в Λ^n заданы базис $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и линейный оператор $\hat{A}$ являющийся *отображением* из Λ^n в Λ^m с базисом $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$.

Известно, что $\forall x \in \Lambda^n$ существует единственное разложение

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i \ , \quad \text{то есть} \quad \| x \|_g = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{Vmatrix}.$$

Аналогично в Λ^m существует единственное разложение $y = \hat{A}x$, для которого в силу линейности $\hat{A}$ справедливо представление вида

$$y = \hat{A}x = \hat{A}(\sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \hat{A} g_i .$$

Приняв во внимание возможность и единственность в пространстве Λ^m разложения вида $\hat{A} g_i = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki} f_k \ \ \forall i = [1, n]$, получаем, что

$$y = \sum_{k=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \xi_i) f_k .$$

С другой стороны, если $\| y \|_f = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_m \end{Vmatrix}$ – координатное представление y в Λ^m, то имеет место равенство $y = \sum\limits_{k=1}^{m} \eta_k f_k$. Наконец, в силу единственности разложения элемента конечномерного пространства по базису получаем

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \xi_i \; ; k = [1, m] .$$

Данные соотношения позволяют находить координатное представление образов элементов линейного пространства по координатному представлению прообраза. При этом отметим, что каждый линейный оператор вида $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$ в паре конкретных базисов полностью и однозначно описывается матрицей размера $m \times n$ с элементами α_{ki}.

Определение

Матрица размера $m \times n$, столбцы которой образованы компонентами элементов $\hat{A}g_i$:

$$\| \hat{A} \|_{fg} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix},$$

называется *матрицей линейного оператора* $\hat{A}$ в базисах

$$\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \in \Lambda^n \quad \text{и} \quad \{f_1, f_2, \dots, f_m\} \in \Lambda^m .$$

В матричной форме соотношения $\eta_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\xi_i \; ; k = [1, m]$ имеют вид $\| y \|_f = \| \hat{A} \|_{fg} \| x \|_g$, в чем легко убедиться, воспользовавшись их *двухиндексной* формой записи:

$$\eta_{k1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \, \xi_{i1} \; ; \qquad k = [1, m] .$$

Полученный результат формулируется как

Теорема

Между множеством всех линейных операторов вида $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$ и множеством всех матриц размера $m \times n$ имеется взаимно однозначное соответствие.

Задача 05. В линейном пространстве алгебраических многочленов степени не выше, чем n, вида $P_m(\tau) = \sum\limits_{k=0}^{m} \xi_k \tau^k$ с базисом $\{1, \tau, \tau^2, \ldots, \tau^n\}$ найти матрицу оператора дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{d\tau}$ по переменной τ.

Решение: 1) Размерность линейного пространства алгебраических многочленов степени не выше, чем n равна $n+1$. А действующий в этом пространстве оператор дифференцирования является линейным преобразованием.

2) Образом базисного элемента τ^k при действии оператора дифференцирования для $1 \le k \le n$ будет функция $k\tau^{k-1}$, а для $k = 0$ - многочлен, равный 0 при $\forall \tau$.

3) По определению столбцами матрицы оператора являются *координатные столбцы* образов базисных элементов. А для образа $k+1$-го базисного элемента *координатное разложение* имеет вид

$$k\tau^{k-1} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot \tau + \ldots + k \cdot \tau^{k-1} + 0 \cdot \tau^k + \ldots + 0 \cdot \tau^n .$$

Поэтому искомая матрица будет

$$\left\| \hat{D} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

Задача 06. В линейном пространстве квадратных матриц второго порядка $X = \begin{Vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{Vmatrix}$ задано преобразование $\hat{M}$ формулой $Y = \hat{M}\, X \equiv A\, X$, где $A = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -7 \end{Vmatrix}$, а матрица Y есть образ матрицы X при данном преобразовании.

Требуется найти матрицу этого преобразования в стандартном базисе $\{ e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \}$, для которого

$$e_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},\ e_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},\ e_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},\ e_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Решение: 1) Имеем: размерность линейного пространства квадратных матриц второго порядка равна 4, а линейность данного преобразования следует из свойства дистрибутивности умножения матриц:

$$\| A \| \left(\lambda_1 \| X \|_1 + \lambda_2 \| X \|_2 \right) = \lambda_1 \| A \| \| X \|_1 + \lambda_2 \| A \| \| X \|_2 = \lambda_1 \| Y \|_1 + \lambda_2 \| Y \|_2$$

2) Координатное представление (координатный столбец) элемента в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка вида $\left\| \begin{matrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{matrix} \right\|$ есть 4-х компонентный столбец $\left\| \begin{matrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \xi_{21} \\ \xi_{22} \end{matrix} \right\|$. Координатное представление линейного преобразования в этом пространстве будет квадратной матрицей 4-го порядка, столбцы которой суть координатные представления образов базисных элементов.

3) Найдем эти представления. Имеем

$$\hat{M}e_1 = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -7 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \| \hat{M}e_1 \| = \begin{Vmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\hat{M}e_2 = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -7 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -6 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \| \hat{M}e_2 \| = \begin{Vmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -6 \end{Vmatrix}$$

$$\hat{M}e_3 = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -7 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \| \hat{M}e_3 \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\hat{M}e_4 = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -7 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \| \hat{M}e_4 \| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -7 \end{Vmatrix}$$

4) Из полученных координатных представлений образов базисных элементов составляем искомую матрицу преобразования $\hat{M}$

$$\left\| \hat{M} \right\|_e = \left\| \begin{matrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -7 \end{matrix} \right\|$$