Координатное представление элементов линейного пространства

Определение Коэффициенты $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ разложения по базису $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ называются *координатами* (или *компонентами*) элемента $x \in \Lambda^n$ в базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$.

Заметим, что в силу теоремы 7.2.1 элемент x линейного пространства Λ^n в базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ однозначно представляется n-компонентным столбцом, называемым *координатным представлением элемента* x *в базисе* $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$: $\| x \|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ ... \\ \xi_n \end{matrix} \right\|$.

В Λ^n базис может быть выбран *не единственным* способом и потому необходимо установить правило изменения координат элемента линейного пространства Λ^n при переходе от одного базиса к другому.

Пусть в Λ^n даны два базиса: "старый" $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и "новый" $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$ с соответствующими координатными разложениями элемента x: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ и $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi'_i g'_i$. И пусть, кроме того, известны разложения элементов "нового" базиса по элементам "старого": $g'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{ij} g_i$; $j = [1, n]$.

Определение Матрица $\|S\|$, j-й $(\forall j = [1, n])$ столбец которой состоит из коэффициентов σ_{ij} координатных разложений элементов "нового" базиса по элементам "старого", называется *матрицей перехода* от базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$.

В этом случае будет справедлива

Теорема **Координаты $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ и $\xi'_1, \xi'_2, ..., \xi'_n$ связаны соотношениями $\xi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \xi'_j \quad \forall i = [1, n]$, называемыми *формулами перехода*, где коэффициенты σ_{ij} – элементы матрицы перехода $\|S\|$.**

Заметим, что если столбец элементов “нового” базиса выражается через столбец элементов “*старого*” при помощи умножения слева на транспонированную матрицу перехода $\| S \|^{\mathrm{T}}$, то координатный столбец в “*старом*” базисе равен произведению матрицы перехода на координатный столбец в “*новом*” базисе.

Действительно, рассматривая столбцы $\| x \|_g$ и $\| x \|_{g'}$ в формулах перехода как *двумерные* матрицы, получаем $\xi_{i1} = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \xi'_{j1} \quad \forall i = [1, n]$, что можно записать в виде $\| x \|_g = \| S \| \| x \|_{g'}$.

Наконец выясним, как *операции* с элементами линейного пространства выполняются *в координатной форме*.

Пусть в конкретном базисе $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ и $y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i g_i$, тогда в силу определения базиса и аксиом линейного пространства будут справедливы следующие соотношения:

1°. Для операции сравнения: два элемента в Λ^n равны тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i = x = y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i g_i$, или в координатной форме $x = y \quad \Leftrightarrow \quad \| x \|_g = \| y \|_g$.

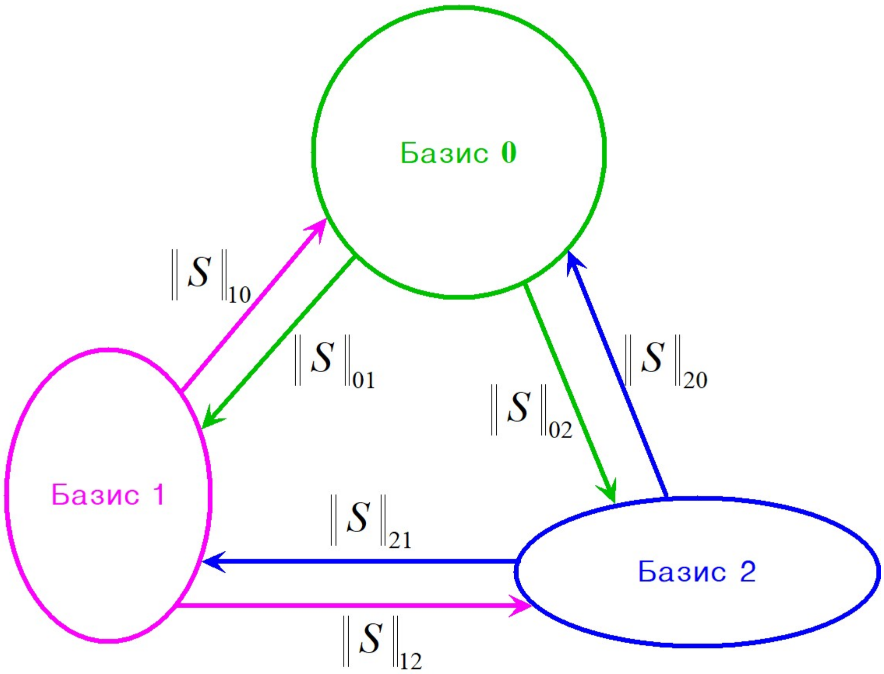
2°. Для операции сложения: $x + y = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i + \eta_i) g_i$, или в координатной форме $\| x + y \|_g = \| x \|_g + \| y \|_g$.

3°. Для операции умножения на число: $\lambda x = \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \xi_i) g_i$, или в координатной форме $\| \lambda x \|_g = \lambda \| x \|_g$.

Откуда следует, что *элементы конечномерного линейного пространства не только могут представляться матрицами* (*столбцами*)*, но и правила выполнения операций с этими элементами совпадают с определением соответствующих матричных операций*.

Задача 04 *Найти матрицу перехода от базиса в* Λ^3, *образованного элементами* $\{g'_1, g'_2, g'_3\}$, *к базису* $\{g''_1, g''_2, g''_3\}$, *если в некотором исходном базисе*:

$$\|g'_1\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \ \|g'_2\| = \begin{Vmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \ \|g'_3\| = \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \qquad \|g''_1\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \ \|g''_2\| = \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \ и \ \|g''_3\| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$



Решение. 1°. Пусть $\|x\|$, $\|x'\|$ и $\|x''\|$ обозначают координатные столбцы элемента x в трех базисах: *исходном*, $\{g_1',g_2',g_3'\}$ и $\{g_1'',g_2'',g_3''\}$ соответственно. Тогда (по определению матрицы перехода и в силу формулы перехода) имеют место равенства

$$\|x\|=\|S_{01}\|\|x'\| \quad \text{и} \quad \|x\|=\|S_{02}\|\|x''\|,$$

где матрицы $\|S_{01}\|$ и $\|S_{02}\|$ составлены из координатных столбцов базисных элементов $\{g_1',g_2',g_3'\}$ и $\{g_1'',g_2'',g_3''\}$, то есть

$$\|S_{01}\|=\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \|S_{02}\|=\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Обозначим через $\|S_{12}\|$ искомую матрицу перехода от базиса $\{g_1',g_2',g_3'\}$ к базису $\{g_1'',g_2'',g_3''\}$, для которой $\|x'\|=\|S_{12}\|\|x''\|$.

2°. Но из условий $\|x\| = \| S_{01} \| \|x'\|$ и $\|x\| = \| S_{02} \| \|x''\|$ следует, что $\|x'\| = \|S_{01}\|^{-1} \| S_{02} \| \|x''\|$, поскольку матрица $\| S_{01} \|$, очевидно, невырожденная.

Тогда $\| S_{12} \| \|x''\| = \| S_{01} \|^{-1} \| S_{02} \| \|x''\|$ для любого элемента $\|x''\|$, а это означает, что искомая матрица перехода $\|S_{12}\| = \|S_{01}\|^{-1} \|S_{02}\|$.

Для подсчета произведения

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|^{-1} \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

используем, например, схему вычисления выражений вида $\|A\|^{-1} \|B\|$, рассмотренную нами ранее в разделе 'Элементарные преобразования матриц'. Напомним, что эта схема заключается в сведении элементарными преобразованиями левой части $\| A | B \|$ к единичной. При этом результатом тех же преобразований правой части оказывается $\|A\|^{-1} \|B\|$.

3°. Опишем возможный ход вычислений.

Из первой строки матрицы $\| S_{01} | S_{02} \|$ вычитаем вторую и результат помещаем на место второй

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\|.$$

Затем, складываем вторую и третью, записывая результат во вторую

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\|.$$

Потом из третьей вычитаем вторую и записываем на место третьей

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right\|.$$

Наконец, сумму всех трех строк записываем на место первой

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right\|.$$

В правой части получили матрицу $\| S_{12} \| = \left\|\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right\|$. Это - ответ!

Изоморфизм линейных пространств

Рассмотрим в качестве примера два линейных пространства:

множество многочленов $P_2(\tau)$ степени не выше, чем 2, и
множество векторов трехмерного геометрического пространства.

Операции сложения многочленов и их умножения на число выглядят следующим образом:

$$(\xi_1+\xi_2\tau+\xi_3\tau^2)+(\eta_1+\eta_2\tau+\eta_3\tau^2)=$$
$$=(\xi_1+\eta_1)+(\xi_2+\eta_2)\tau+(\xi_3+\eta_3)\tau^2,$$
$$\lambda(\xi_1+\xi_2\tau+\xi_3\tau^2)=(\lambda\xi_1)+(\lambda\xi_2)\tau+(\lambda\xi_3)\tau^2.$$

Те же операции с трехмерными векторами в координатной форме в свою очередь записываются так:

$$\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\xi_1+\eta_1\\ \xi_2+\eta_2\\ \xi_3+\eta_3\end{Vmatrix};\quad \lambda\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\lambda\xi_1\\ \lambda\xi_2\\ \lambda\xi_3\end{Vmatrix}.$$

Сопоставляя эти записи, можно заключить, что природа данных множеств не играет роли, когда исследуются их характеристики, связанные только с операциями сравнения, сложения и умножения на число.

Отмеченное свойство линейных пространств носит название *изоморфизма*. Более точно его описывает

Определение

Два линейных пространства Λ_1 и Λ_2 называются *изоморфными*, если существует *взаимно однозначное* отображение $\hat{F}$: $\Lambda_1 \to \Lambda_2$, такое, что для $\forall\lambda$ и $\forall x, y \in \Lambda_1$,

1°. $\hat{F}(x+y) = \hat{F}x + \hat{F}y$;

2°. $\hat{F}(\lambda x) = \lambda \hat{F}x$.

Отображение $\hat{F}$ называется *изоморфизмом* линейных пространств Λ_1 и Λ_2.

Теорема (об изоморфизме).

Два линейных конечномерных пространства Λ_1 и Λ_2 изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.

Пример *Изоморфизм одномерных пространств вещественных чисел R и всех положительных чисел R^+ (с операциями, определенными в условии задачи 03) задается при помощи функций $x = \ln(y)$ и $y = e^x$; $x \in R$; $y \in R^+$.*

Очевидным следствием данной теоремы является изоморфизм любого линейного n-мерного пространства Λ^n и линейного пространства n-компонентных столбцов.

Например, имеют место

Теорема **Максимальное число линейно независимых элементов в любом конечном наборе элементов из Λ^n равно рангу матрицы, столбцы которой содержат координаты элементов данного набора в некотором базисе.**

Следствие **k элементов в Λ^n линейно зависимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы, столбцы которой содержат координаты этих элементов в некотором базисе, меньше, чем $\min\{n,k\}$.**

Пусть в Λ^n задан базис $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$, в котором координатное представление элементов представляется в виде $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i g_i$. Тогда имеет место

Следствие **Каждая *однородная* линейная система m линейных уравнений с n неизвестными $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \xi_i = 0$, $j = [1, m]$ определяет некоторое подпространство Ω в Λ^n.**

Таким образом, каждое подпространство в Λ^n может быть задано либо однородной системой линейных уравнений, либо как линейная оболочка базиса подпространства – фундаментальной системы ее решений.

Задача 05 *В линейном пространстве многочленов степени не выше, чем 3, найти базис и размерность пересечения двух линейных оболочек элементов:*

$$x_1(\tau) = 1 + 2\tau + \tau^2 + 3\tau^3,$$
$$x_2(\tau) = -1 + 8\tau - 6\tau^2 + 5\tau^3,$$
$$x_3(\tau) = 10\tau - 5\tau^2 + 8\tau^3$$

и

$$y_1(\tau) = 1 + 4\tau - \tau^2 + 5\tau^3,$$
$$y_2(\tau) = 3 - 2\tau + 6\tau^2 + 3\tau^3,$$
$$y_3(\tau) = 4 + 2\tau + 5\tau^2 + 8\tau^3.$$

Решение.

1°. Каждая из линейных оболочек является подпространством. Первое из них Π_1 образовано элементами вида $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$, а второе Π_2 – соответственно элементами

$$y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 .$$

Составим однородные системы линейных уравнений, задающих эти подпространства. Пусть каждое из уравнений этих систем имеет вид

$$\left\| \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{matrix} \right\| = 0 .$$

Тогда, воспользовавшись изоморфизмом между Π_1 и пространством четырехкомпонентных столбцов вида

$$\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{matrix} \right\| = \lambda_1 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{matrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{matrix} \right\| + \lambda_3 \left\| \begin{matrix} 0 \\ 10 \\ -5 \\ 8 \end{matrix} \right\| ,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – любые числа, приходим к условию

$$\left\| \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{matrix} \right\| = \left\| \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \right\| (\lambda_1 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{matrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{matrix} \right\| + \lambda_3 \left\| \begin{matrix} 0 \\ 10 \\ -5 \\ 8 \end{matrix} \right\|) = 0 ,$$

которое будет выполняться при любых $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, если числа $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ образуют решение следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+3\alpha_4=0, \\ -\alpha_1+8\alpha_2-6\alpha_3+5\alpha_4=0, \\ 10\alpha_2-5\alpha_3+8\alpha_4=0. \end{cases}$$

Решив эту систему, например, по схеме, описанной в § 6.8, получим общее решение в виде

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Vmatrix} = \kappa_1 \begin{Vmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix} + \kappa_2 \begin{Vmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{Vmatrix}; \ \forall \kappa_1,\kappa_2$$

откуда заключаем, что существует два независимых набора искомых чисел $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, и, следовательно, однородная система линейных уравнений, задающая подпространство Π_1 имеет вид

$$\begin{cases} -4\xi_1+\xi_2+2\xi_3 \qquad =0, \\ -7\xi_1-4\xi_2 \qquad +5\xi_4=0. \end{cases}$$

Аналогично строим однородную систему линейных уравнений, задающую Π_2:

$$\begin{cases} -22\xi_1+9\xi_2+14\xi_3 \qquad =0, \\ -11\xi_1-6\xi_2 \qquad +7\xi_4=0. \end{cases}$$

Наконец, подпространство $\Pi_1 \cap \Pi_2$ будет задаваться системой

$$\begin{cases} -4\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 0, \\ -7\xi_1 - 4\xi_2 + 5\xi_4 = 0, \\ -22\xi_1 + 9\xi_2 + 14\xi_3 = 0, \\ -11\xi_1 - 6\xi_2 + 7\xi_4 = 0, \end{cases}$$

общее решение которой есть

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Vmatrix} = \sigma_1 \begin{Vmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{Vmatrix},$$

и, следовательно, для $\Pi_1 \cap \Pi_2$ имеем $\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = 1$ и базис, состоящий из одного элемента $\begin{Vmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{Vmatrix}$.