Определение линейного пространства

Определение 7.1.1.

Множество Λ, состоящее из элементов $x, y, z, \ldots$, для которых определена операция сравнения, называется *линейным пространством*, если

1°. Каждой паре элементов x, y этого множества поставлен в соответствие третий элемент этого же множества, называемый их «*суммой*» и обозначаемый $x + y$, таким образом, что выполнены аксиомы

а) $x + y = y + x$;

б) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

в) существует *нулевой элемент* o, такой, что для любого $x \in \Lambda$ имеет место $x + o = x$;

г) для каждого x существует *противоположный элемент* $-x$, такой, что $-x + x = o$.

2°. Для любого элемента x и любого числа λ существует такой принадлежащий Λ элемент, обозначаемый λx и называемый «*произведением числа на элемент*», что выполнены аксиомы:

а) $1x = x$;

б) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

3°. Для операций сложения элементов и умножения элемента на число выполнены аксиомы дистрибутивности:

а) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

б) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall x, y \in \Lambda$; и для любых чисел λ, μ.

Замечания:

1°. Под “числами” в аксиомах второй и третьей групп подразумеваются действительные или комплексные числа.

2°. Операция сравнения дает возможность устанавливать факты «равенства x и y» $(x = y)$ или «неравенства x и y» $(x \neq y)$ для любой пары двух элементов принадлежащих множеству Λ

3°. Первая группа аксиом равносильна требованию, чтобы Λ являлось абелевой группой относительно операции сложения.

Примеры Линейным пространством является (предполагается, что операции сложения и умножения на число выполняются в соответствии с ранее данными определениями):

1°. Множество всех векторов на плоскости.

2°. Множество всех векторов в пространстве.

3°. Множество всех n-компонентных столбцов.

4°. Множество всех многочленов степени не выше, чем n.

5°. Множество всех матриц размера $m \times n$.

6°. $C[\alpha,\beta]$ – множество всех функций, непрерывных на $[\alpha,\beta]$.

7°. Множество всех решений *однородной* системы m линейных уравнений с n неизвестными.

Задача 01 *Показать, что в общем случае множество радиусов-векторов точек, принадлежащих плоскости* $(\vec{n},\vec{r})=\delta$, *не является линейным пространством. Выяснить, при каких значениях параметра* δ *данное множество будет линейным пространством.*

Задача 02 *Показать, что множество, состоящее из одного нулевого элемента, является линейным пространством.*

Задача 03 *Будет ли линейным пространством множество всех положительных чисел* R^+?

Решение. Ответ зависит от способа введения операций сложения и умножения на число элементов рассматриваемого множества.

1°. Пусть операции вводятся “естественным” образом. В этом случае множество положительных чисел не образует линейного пространства, поскольку в нем отсутствует нулевой элемент.

2°. Если же операцию “*сложения*” определить как обычное произведение двух чисел, а “*умножение числа* λ *на* x” определить как возведение положительного числа x в степень $\lambda \in R$:

$$\text{«}\textit{сложение } x+y\text{»} \coloneqq x \cdot y\,;\ \ x>0,\ y>0\ ,$$
$$\text{«}\textit{произведение } \lambda x\text{»} \coloneqq x^{\lambda}\,;\ \ x>0,$$

то множество положительных чисел будет являться линейным пространством, в котором роль нулевого элемента играет число “1”.

Из аксиоматики линейного пространства следуют теоремы:

Теорема 01 **Линейное пространство имеет единственный нулевой элемент.**

Теорема 02 **Для каждого элемента x линейного пространства имеет место равенство $0x = o$.**

Теорема 03 **Для каждого элемента линейного пространства существует единственный противоположный элемент.**

Теорема 04 **Для каждого $x \in \Lambda$ противоположным элементом служит элемент $-x = (-1)x$.**

Доказательство теоремы 02

Из аксиоматики линейного пространства имеем

$$x = 1x = (0+1)x = 0x + 1x = 0x + x.$$

Прибавляя к обеим частям равенства $x = 0x + x$ элемент $-x$, противоположный элементу x, получаем, что $0x = o$.

Теорема доказана.

Линейная зависимость, независимость, размерность и базис в линейном пространстве

Определение

1°. Выражение $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ называется *линейной комбинацией* элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейного пространства Λ.

2°. Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейного пространства Λ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не равные нулю одновременно, такие, что $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = o$.

3°. Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейного пространства Λ называются *линейно независимыми*, если из равенства $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = o$ следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Заметим, что, если все коэффициенты λ_i в линейной комбинации равны нулю, то она называется *тривиальной*. В противном случае говорят о *нетривиальной* линейной комбинации.

Для элементов линейного пространства справедливы

Лемма 01 **Для того чтобы некоторое множество элементов линейного пространства было линейно зависимым, необходимо и достаточно, чтобы один из этих элементов являлся линейной комбинацией остальных.**

Лемма 02 **Если некоторое подмножество множества элементов $x_1, x_2, ..., x_n$ линейно зависимо, то линейно зависимы и сами элементы $x_1, x_2, ..., x_n$.**

Определение

Базисом в линейном пространстве Λ называется любой упорядоченный набор его n элементов, если

1) эти элементы линейно независимые;
2) любое подмножество в Λ, содержащее $n+1$ элемент, включая эти n элементов, линейно зависимое.

Определение

Линейное пространство Λ называется n-*мерным* и обозначается Λ^n, если в нем существует базис, состоящий из n элементов. Число n называется *размерностью* линейного пространства Λ^n и обозначается $\dim(\Lambda^n)$.

Теорема 05

Для каждого элемента линейного пространства Λ^n *существует единственное* представление в виде линейной комбинации базисных элементов.

В общем случае линейное пространство может не иметь базиса. Таким свойством обладает, например, линейное пространство, состоящее из одного нулевого элемента.

Примеры базисов в линейных пространствах

Линейное пространство	**Размерность**	**Пример базиса**
Множество всех векторов на плоскости	2	Упорядоченная пара неколлинеарных векторов на плоскости.
Множество всех векторов в пространстве	3	Упорядоченная тройка нормированных, попарно ортогональных векторов.
Множество всех n-компонентных столбов	n	n столбцов вида $\left\Vert\begin{matrix}1\\0\\...\\0\end{matrix}\right\Vert;\ \left\Vert\begin{matrix}0\\1\\...\\0\end{matrix}\right\Vert;\ ...;\ \left\Vert\begin{matrix}0\\0\\...\\1\end{matrix}\right\Vert.$
Множество всех алгебраических многочленов степени не выше, чем n	$n+1$	$n+1$ одночлен вида $P_1(\tau)=1;\ P_2(\tau)=\tau;$ $P_3(\tau)=\tau^2;\ P_4(\tau)=\tau^3;$ $...;$ $P_n(\tau)=\tau^{n-1};\ P_{n+1}(\tau)=\tau^n.$
Множество всех матриц размера $m\times n$	$n\cdot m$	$n\cdot m$ всевозможных различных матриц размера $m\times n$, все элементы которых равны нулю, кроме одного, равного 1.
Множество всех функций, непрерывных на $[\alpha,\beta]$	∞	Базис не существует, поскольку для любого натурального n можно построить линейно независимый набор, состоящий из $n+1$ элемента. Например, множество функций вида $\{1,\ \tau,\ \tau^2,\ \dots,\ \tau^n\}$..
Множество решений однородной системы m линейных уравнений с n неизвестными и рангом основной матрицы, равным r	$n-r$	Нормальная фундаментальная система решений.

Задача 01. Для линейного пространства квадратных матриц второго порядка построить базис и найти размерность этого проостранства.

Решение: 1) В линейном пространстве матриц вида $\left\|\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{matrix}\right\|$ очевидно *нулевым элементом* является матрица $\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|$.

2) Покажем, что набор из *четырех* следующих матриц

$$\left\{ \left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\| \right\} \tag{A}$$

является *линейно независимым*.

Действительно, из равенства

$$\lambda_1\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\| + \lambda_2\left\|\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}\right\| + \lambda_3\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right\| + \lambda_4\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|$$

следует, что

$$\lambda_1\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\| + \lambda_2\left\|\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}\right\| + \lambda_3\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right\| + \lambda_4\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_3 & \lambda_4\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\| .$$

Откуда получаем (по определению равных матриц), что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Это и означает линейную независимость.

3) Покажем, что для *любой* матрицы $\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}$ набор матриц

$$\left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \right\} \qquad \text{(B)}$$

является *линейно зависимым*.

Поскольку для произвольной матрицы $\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}$ верно равенство

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} = \alpha_{11} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + \alpha_{12} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + \alpha_{21} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} + \alpha_{22} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

то

$$\alpha_{11} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + \alpha_{12} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + \alpha_{21} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} + \alpha_{22} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + (-1) \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Здесь $|\alpha_{11}| + |\alpha_{12}| + |\alpha_{21}| + |\alpha_{22}| + |-1| \neq 0$ при любых $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$ и α_{22}, т.е. существует *нетривиальная* линейная комбинация матриц (В), равная нулевому элементу рассматриваемого пространства. Значит набор (В) линейно зависимый.

4) Теперь, исходя из определения базиса, заключаем, что набор (А) является базисом в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка, а размерность этого пространства равна 4.

Подмножества линейного пространства

Подпространство

Определение 7.3.1. Непустое множество Ω, образованное из элементов линейного пространства Λ, называется *подпространством* этого линейного пространства, если для любых $x, y \in \Omega$ и любого числа λ

1) $x + y \in \Omega$,
2) $\lambda x \in \Omega$.

Замечание: из определения 7.3.1 следует, что множество Ω само является линейным пространством, поскольку для него, очевидно, выполняются все аксиомы операций в линейном пространстве.

Примеры

1°. Множество радиусов-векторов всех точек, лежащих на некоторой плоскости, проходящей через начало координат, является подпространством во множестве радиусов-векторов всех точек трехмерного геометрического пространства.

2°. Множество всех многочленов степени не выше, чем n, есть подпространство в линейном пространстве непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций.

3°. В пространстве n-мерных столбцов совокупность решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными и с основной матрицей ранга r образует подпространство размерности $n-r$.

4°. Подпространством любого линейного пространства будет:
   а) само линейное пространство;
   б) множество, состоящее из одного нулевого элемента.

Определение

Пусть даны два подпространства Ω_1 и Ω_2 линейного пространства Λ. Тогда

1°. *Суммой* подпространств Ω_1 и Ω_2 называется совокупность всех элементов $x_1 + x_2 \in \Lambda$ при условии, что $x_1 \in \Omega_1$ и $x_2 \in \Omega_2$. Сумма подпространств Ω_1 и Ω_2 обозначается $\Omega_1 + \Omega_2$.

2°. *Прямой суммой* подпространств Ω_1 и Ω_2 называется совокупность всех элементов $x_1 + x_2 \in \Lambda$ при условии, что $x_1 \in \Omega_1$ и $x_2 \in \Omega_2$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{o\}$. Прямая сумма обозначается $\Omega_1 \oplus \Omega_2$.

Справедливы теоремы

Теорема 06

Как сумма, так и пересечение подпространств Ω_1 и Ω_2 в Λ суть также подпространства в Λ.

Теорема 07

Размерность *суммы* подпространств Ω_1 и Ω_2 равна

$$\dim(\Omega_1 + \Omega_2) = \dim(\Omega_1) + \dim(\Omega_2) - \dim(\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

Линейная оболочка системы элементов

Определение Совокупность всевозможных линейных комбинаций некоторого множества элементов $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ линейного пространства Λ называется *линейной оболочкой* этого множества и обозначается $L\{x_1, x_2, ..., x_k\}$.

Пример Множество многочленов степени не выше, чем n, является линейной оболочкой набора одночленов $\{1, \tau, \tau^2, ..., \tau^n\}$ в линейном пространстве непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций.

Пусть задан набор элементов $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \in \Lambda$, порождающих линейную оболочку $L\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, тогда любой элемент этой линейной оболочки имеет вид $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ и справедлива

Теорема 08 **Множество всех элементов, принадлежащих линейной оболочке $L\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, является в Λ подпространством размерности m, где m – максимальное число линейно независимых элементов в наборе $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$.**

Гиперплоскость

Определение Множество Γ, образованное из элементов вида $x + x_0$, где x_0 есть произвольный фиксированный элемент линейного пространства Λ, а x – любой элемент некоторого подпространства $\Omega \subset \Lambda$, называется *гиперплоскостью* (или *линейным многообразием*) в линейном пространстве Λ.

Замечания.

1°. В общем случае гиперплоскость не является подпространством.

2°. Если $\dim(\Omega) = k$, то говорят о k-мерной гиперплоскости.

Например, общее решение совместной *неоднородной* системы линейных уравнений с n неизвестными является гиперплоскостью в линейном пространстве n-компонентных столбцов.