ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. МЕТОД ГАУССА

Практическое применение теории решения систем линейных уравнений затрудняется тем, что заранее, как правило, неизвестно, совместна ли решаемая система. Более эффективным вычислительным алгоритмом, позволяющим либо находить общее решение системы (6.6.1), либо устанавливать факт ее несовместности, является *метод Гаусса*.

Суть этого метода заключается в преобразовании расширенной матрицы системы линейных уравнений к *наиболее простому виду* последовательностью так называемых *элементарных* преобразований, каждое из которых не меняет общего решения системы уравнений.

Под “наиболее простым” видом расширенной матрицы мы будем понимать *верхнюю треугольную форму* (т.е. случай, когда $\alpha_{ij} = 0$ при $i > j$), для которой возможно рекуррентное нахождение неизвестных путем лишь решения на каждом шаге процедуры линейного уравнения с одним неизвестным.

Ниже приведен пример матрицы размера $m \times n \; (n > m)$, имеющей верхнюю треугольную форму

$$\left\|\begin{array}{cccccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,m-2} & a_{1,m-1} & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,m-2} & a_{2,m-1} & a_{2,m} & a_{2,m+1} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,m-2} & a_{3,m-1} & a_{3,m} & a_{3,m+1} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1,m-1} & a_{m-1,m} & a_{m-1,m+1} & \dots & a_{m-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \end{array}\right\|.$$

К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

- перестановка строк (перенумерация уравнений);
- перестановка столбцов основной матрицы (перенумерация неизвестных);
- удаление нулевой строки (исключение уравнений, тождественно удовлетворяющихся любыми значениями неизвестных);
- умножение строки на ненулевое число (нормирование уравнений);
- сложение строки с линейной комбинацией остальных строк с записью результата на место исходной строки (замена одного из уравнений системы следствием ее уравнений, получаемым при помощи линейных операций).

Решение неоднородной системы уравнений (равно как и ранг ее матрицы) не изменится также и при использовании любой комбинации элементарных операций.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что элементарные преобразования любой матрицы могут быть выполнены при помощи умножения ее на матрицы следующего специального вида. Например:

- перестановка *столбцов* с номерами i и j матрицы $\|A\|$ размера $m\times n$ осуществляется путем ее умножения *справа* на матрицу $\|S\|_1$ размера $n\times n$, которая в свою очередь получается из единичной матрицы n-го порядка $\|E\|$ путем перестановки в последней i-го и j-го столбцов;
- умножение i-й *строки* матрицы $\|A\|$ на некоторое число $\lambda\neq 0$ осуществляется путем умножения $\|A\|$ *слева* на матрицу $\|S\|_2$, которая получается из единичной размера $m\times m$ матрицы $\|E\|$ путем замены в последней i-го диагонального элемента (равного единице) на λ;
- сложение *строк* с номерами i и j матрицы $\|A\|$ осуществляется путем ее умножения *слева* на матрицу $\|S\|_3$ размера $m\times n$, которая получается из единичной матрицы порядка m $\|E\|$ путем замены в последней нулевого элемента, стоящего в i-й строке и j-м столбце, на единицу (при этом результат суммирования окажется на месте i-й строки исходной матрицы $\|A\|$).

Можно показать, что если матрица $\|S\|$ квадратная и невырожденная и возможно умножение матрицы $\|S\|$ на матрицу $\|A\|$, то справедливо равенство

$$\operatorname{rg}(\|S\|\|A\|) = \operatorname{rg}\|A\|.$$

Поскольку $\det\|S\|_1 = -1$, $\det\|S\|_2 = \lambda \neq 0$ и $\det\|S\|_3 = 1$, то ранг $\|A\|$ при рассмотренных выше преобразованиях не меняется.

Проверьте самостоятельно, что будут также справедливы следующие теоремы

Теорема 6.8.1. **Последовательное применение нескольких элементарных преобразований есть новое преобразование, которое имеет матрицу, являющуюся *произведением* матриц данных элементарных преобразований.**

Теорема 6.8.2. **Если умножение матрицы $\|A\|$ слева на квадратную матрицу $\|S\|$ реализует некоторое преобразование над строками $\|A\|$, то умножение $\|A\|$ справа на $\|S\|^{\mathrm{T}}$ реализует то же самое преобразование матрицы $\|A\|$, но выполненное над ее столбцами.**

Отмеченные свойства элементарных преобразований позволяют в ряде случаев упрощать вычислительные процедуры с матричными выражениями. Пусть, например, $\|S\|^*$ есть матрица преобразования, переводящего невырожденную матрицу $\|A\|$ в единичную. Тогда преобразование с матрицей $\|S\|^*$ переведет единичную матрицу $\|E\|$ в матрицу $\|A\|^{-1}$, поскольку в силу $\|E\| = \|S\|^* \|A\|$ и невырожденности $\|A\|$ справедливы равенства

$$\|E\|\|A\|^{-1} = \|S\|^*\|A\|\|A\|^{-1} \quad \text{или} \quad \|A\|^{-1} = \|S\|^*\|E\| .$$

Из этих соотношений следует, что вычисление произведения квадратных матриц $\|A\|^{-1}\|B\|$ может быть сведено к последовательности элементарных преобразований матрицы $\|A \mid B\|$ (то есть матрицы, образованной добавлением столбцов матрицы $\|B\|$ к матрице $\|A\|$), приводящих подматрицу $\|A\|$ к единичной. В результате искомое произведение оказывается на месте подматрицы $\|B\|$.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений, основанный на элементарных преобразованиях расширенной матрицы, является универсальной процедурой, не требующей использования каких-либо специфических свойств этой матрицы.

Проиллюстрируем данное утверждение следующим примером.

Пример 01. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 = 7, \\ 3\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 - 3\xi_5 = -2, \\ \xi_2 + 2\xi_3 + 2\xi_4 + 6\xi_5 = 23, \\ 5\xi_1 + 4\xi_2 + 3\xi_3 + 3\xi_4 - \xi_5 = 12. \end{cases}$$

Решение. 1°. Составляем расширенную матрицу системы

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array} \right\| .$$

2°. Приводим ее к верхнему треугольному виду. Для этого

а) преобразуем в нули все элементы первого столбца, кроме элемента, стоящего в первой строке. Например, для зануления элемента, стоящего во второй строке первого столбца, заменим вторую строку матрицы строкой, которая является суммой первой строки, умноженной на (-3), и второй строки. Аналогично поступаем с четвертой строкой: ее заменяем линейной комбинацией первой и четвертой строк с коэффициентами (-5) и 1 соответственно. Третью, естественно, не меняем: там уже имеется необходимый для верхнего треугольного вида ноль. В итоге матрица приобретает вид

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{array}\right\|;$$

б) выполняем теперь операцию зануления элементов второго столбца, стоящих в его третьей и четвертой строках. Для этого третью строку матрицы заменяем суммой второй и третьей, а четвертую – разностью второй и четвертой. Получаем

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|;$$

в) поскольку в данном конкретном случае элемент, расположенный в четвертой строке третьего столбца, оказался равным нулю, то приведение расширенной матрицы к верхнему треугольному виду завершено.

3°. Полученная матрица является расширенной матрицей системы линейных уравнений, равносильной исходной системе. Ранг этой матрицы совпадает с рангом исходной. Потому заключаем, что

1) система совместна, поскольку ранг основной матрицы равен рангу расширенной и равен 2 (по теореме Кронекера–Капелли);
2) однородная система уравнений будет иметь $n - \mathrm{rg}\|A\| = 5 - 2 = 3$ линейно независимых решения.

4°.. Поскольку общее решение неоднородной системы есть общее решение однородной плюс частное решение неоднородной, то нам достаточно найти три любых линейно независимых решения однородной системы и какое-нибудь одно решение неоднородной.

Перепишем исходную систему в преобразованном виде, приняв первое и второе неизвестные за основные, а третье, четвертое и пятое – за свободные:

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 7 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5, \\ \xi_2 = 23 - 2\xi_3 - 2\xi_4 - 6\xi_5. \end{cases} \quad (6.8.1)$$

Второе строку для удобства вычислений умножим на (-1), а третью и четвертую строки отбросим, так как уравнения, им соответствующие, удовлетворяются тождественно.

Положив в системе (6.8.1) свободные неизвестные равными нулю, находим частное решение неоднородной системы $\left\| \begin{matrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$. Значения основных неизвестных определяются из легко решаемой системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 7, \\ \xi_2 = 23. \end{cases}$$

Для однородной системы

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 0 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5, \\ \xi_2 = 0 - 2\xi_3 - 2\xi_4 - 6\xi_5 \end{cases}$$

строим фундаментальную систему решений по стандартной схеме. Первое линейно независимое решение $\left\| \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$ находится из системы

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = -1, \\ \xi_2 = -2. \end{cases}$$

Аналогично получаются $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$ – второе и третье решения.

Окончательно общее решение исходной неоднородной системы в матричном виде может быть записано как:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{Vmatrix} = \lambda_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \lambda_2 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \lambda_3 \begin{Vmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 .$$

Замечание.: Поскольку существует свобода выбора как частного решения неоднородной системы, так и линейно независимых решений однородной, то общее решение неоднородной системы может быть записано в различных, но, естественно, равносильных формах.

Как будет видно из дальнейшего, большое число задач, решение которых оказывается необходимым, являются (или сводятся) к задачам решения систем линейных уравнений. Одной из таких задач является задача построения однородной системы линейных уравнений, имеющей общее решение заданного вида. По сути, речь идет о задаче 'обратной' к задаче решения системы линейных уравнений. Рассмотрим

Пример 02. Определить возможный вид однородной системы линейных уравнений, имеющей частные решения вида

$$\left\|\begin{matrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\right\|; \quad \left\|\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}\right\|; \quad \left\|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\|.$$

Решение: 1) При любых постоянных λ_1, λ_2 и λ_3 решением искомой системы будет являться линейная комбинация вида

$$\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\| = \lambda_1 \left\|\begin{matrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\right\| + \lambda_2 \left\|\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}\right\| + \lambda_3 \left\|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\|. \qquad (A)$$

Предположим, что некоторое уравнение искомой системы имеет вид

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0 \;,$$

или в матричной форме $\left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right\| = 0 .$ (B)

2) Выясним, при каких значениях $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ это равенство окажется верным при любых λ_1, λ_2 и λ_3. Для этого подставим (A) в (B) и перегруппируем слагаемые в левой части:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{matrix} \right\| \left(\lambda_1 \left\| \begin{matrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{matrix} \right\| + \lambda_3 \left\| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| \right) = 0$$

$$\left(\lambda_1 \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{matrix} \right\| + \lambda_3 \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| \right) = 0$$

3) Это равенство окажется очевидно верным при любых λ_1, λ_2 и λ_3, если числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ являются решением следующей однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -\alpha_1 - 5\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0, \\ \quad\quad 2\alpha_2 - \alpha_3 \quad - \alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 \quad - \alpha_2 \quad\quad + \alpha_4 = 0. \end{cases} \tag{C}$$

4) Решаем эту систему методом Гаусса, преобразуем ее основную матрицу:

$$\begin{Vmatrix} -1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} -1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & 3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} -1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{D}$$

Примем α_1 и α_4 за основные неизвестные, а α_2 и α_3 - за свободные. Получим упрощенную систему: $\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_4 = -5\alpha_2 + 3\alpha_3, \\ \quad\quad \alpha_4 = \ \ 2\alpha_2 - \alpha_3. \end{cases}$

5) Ранг матрицы (D) равен 2, поэтому система (C) имеет $4-2=2$ фундаментальных решения вида:

$$\left\|\begin{matrix}-1\\1\\0\\2\end{matrix}\right\|;\quad\left\|\begin{matrix}1\\0\\1\\-1\end{matrix}\right\|$$

Проверьте это самостоятельно.

6) Откуда следует, что искомая система будет иметь максимум два независимых уравнения, например, вида $\begin{cases}-x_1+x_2+2x_4=0,\\ x_1+x_3-x_4=0.\end{cases}$

Это - ответ задачи.

Для полноты картины, отметим, что существует альтернативный метод решения рассмотренной задачи. Приведем его описание. Итак

Пример 03. Определить возможный вид однородной системы линейных уравнений, имеющей частные решения вида

$$\left\|\begin{matrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\right\| ; \quad \left\|\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}\right\| ; \quad \left\|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\| .$$

Решение: 1) Опять-таки, при любых постоянных λ_1, λ_2 и λ_3 решением искомой системы будет являться линейная комбинация вида

$$\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\| = \lambda_1 \left\|\begin{matrix} -1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\right\| + \lambda_2 \left\|\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}\right\| + \lambda_3 \left\|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\| . \qquad \text{(A)}$$

2) По правилам действия с матрицами из равенства (А) следует, что числа λ_1, λ_2 и λ_3 должны являться решением неоднородной системы линейных уравнений вида

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & x_1, \\ -5\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & x_2, \\ 3\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & x_3, \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & x_4. \end{array}\right. \qquad \text{(E)}$$

3) Система (Е) должна быть верной при любых λ_1, λ_2 и λ_3, а, значит, у нее правые части должны быть такие, что эта система имеет решение.

Теорема Кронекера-Капелли утверждает, что для совместности неоднородной системы необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы равнялся рангу расширенной.

Найдем эти ранги для системы (E), используя метод Гаусса. Имеем

$$\left\|\begin{array}{rrrcr} -1 & 0 & 1 & | & x_1 \\ -5 & 2 & -1 & | & x_2 \\ 3 & -1 & 0 & | & x_3 \\ 2 & -1 & 1 & | & x_4 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrrcr} -1 & 0 & 1 & | & x_1 \\ 0 & 2 & -6 & | & -5x_1+x_2 \\ 0 & -1 & 3 & | & 3x_1+x_3 \\ 0 & -1 & 3 & | & 2x_1+x_4 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrrcr} -1 & 0 & 1 & | & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & x_1+x_2+2x_3 \\ 0 & -1 & 3 & | & 3x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & | & x_1+x_3-x_4 \end{array}\right\|$$

4) Ранг основной матрицы равен 2. Ранг расширенной матрицы при произвольных значениях x_1, x_2, x_3 и x_4 вполне может быть больше, чем 2. Однако, если потребовать, чтобы эти значения удовлетворяли однородной системе уравнений,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \qquad \text{(F)}$$

то ранги совпадут. Значит, система (F) ответ задачи.

5) Наконец заметим, что, если первое уравнение системы (F) сложить с удвоенным вторым и заменить этой суммой первое уравнение, то мы получим равносильную систему, совпадающую с ответом в первом методе.