Системы *m* линейных уравнений с *n* неизвестными

Наша основная задача: найти формулу, описывающую *все* решения систему m линейных уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{mn}\xi_n = \beta_m, \end{cases} \tag{6.6.1}$$

которая в *неразвернутой* форме записывается как

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = \beta_i \ , \quad i = [1, m] \ , \qquad \text{или же в } \textit{матричной} \text{ форме} \qquad \|A\| \, \|x\| = \|b\|,$$

где матрица $\|A\|$ (размера $m \times n$) имеет *произвольные* численные компоненты α_{ij}, а столбцы $\|x\|$ и $\|b\|$ - соответственно компоненты ξ_j, $j = [1, n]$, и $\beta_i, i = [1, m]$.

Напомним основные определения, необходимые при решении систем линейных уравнений.

Определение Упорядоченный набор чисел $\{\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0\}$ будем называть *частным решением* системы линейных уравнений (6.6.1), если при подстановке этих чисел в систему мы получаем верные равенства. Частное решение системы линейных уравнений будем записывать в виде столбца $\|x^0\| = \begin{Vmatrix} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \ldots \\ \xi_n^0 \end{Vmatrix}$.

Совокупность *всех* частных решений системы линейных уравнений (6.6.1) назовем *общим решением* системы (6.6.1).

Если система (6.6.1) имеет хотя бы одно частное решение, то она называется *совместной*, в противном случае – *несовместной* системой уравнений.

Определение Система (6.6.1) называется *однородной*, если $\beta_i = 0 \ \forall i = [1, m]$, в противном случае – *неоднородной* системой уравнений.

Однородная система $\|A\|\,\|x\| = \|o\|$ всегда совместна, поскольку имеет очевидное нулевое (тривиальное) решение.

Определение Матрица $\|A\|$ называется *основной* матрицей системы (6.6.1), а матрица $\|A \mid b\| = \left\| \begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array} \right\|$ – *расширенной* матрицей этой системы.

Приведем теперь формулировки основных теоретических утверждений, используемых при решении систем линейных уравнений.

Нам потребуются:

Теорема (Кронекера–Капелли). **Для того чтобы система (6.6.1) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы был равен рангу расширенной.**

Для системы n линейных уравнений с n неизвестными $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = \beta_j$; $i = [1,n]$ имеет место

Теорема (правило Крамера). **Для того чтобы система линейных уравнений (6.4.1) *имела единственное* решение, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta = \det\| A \| \neq 0$, и в этом случае решение данной системы будет иметь вид**

$$\xi_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \; ; \; j = 1,2,\ldots,n \, ,$$

где Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы $\| A \|$ заменой ее j-го столбца на столбец свободных членов $\| b \|$:

$$\Delta_j = \det \begin{array}{c} \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \beta_1 & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \beta_2 & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \beta_n & \ldots & \alpha_{nn} \end{matrix} \right\| \\ \uparrow \\ j\text{-й столбец} \end{array} .$$

Ранг матрицы

Пусть число k такое, что $1 \le k \le \min\{m,n\}$. Выберем некоторым способом в $\|A\|$ k столбцов и k строк, на пересечении которых стоят элементы, образующие квадратную матрицу минора порядка k.

Пусть при данном k все миноры k-го порядка равны нулю, тогда будут равны нулю и все миноры порядка выше, чем k, поскольку каждый минор $(k+1)$-го порядка представим в виде линейной комбинации миноров порядка k (см. следствие 6.3.1).

Определение.

Максимальный из порядков, *отличных от нуля* миноров матрицы $\|A\|$, называется *рангом* матрицы и обозначается $\operatorname{rg}\|A\|$.

Любой ненулевой минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется *базисным минором*.

Столбцы (строки) матрицы, входящие в матрицу базисного минора, называются *базисными*.

Линейная зависимость столбцов

Рассмотрим n m-компонентных столбцов вида

$$\| a_1 \| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \ldots \\ \alpha_{m1} \end{matrix} \right\| ; \ \| a_2 \| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \ldots \\ \alpha_{m2} \end{matrix} \right\| ; \ldots ; \ \| a_n \| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \ldots \\ \alpha_{mn} \end{matrix} \right\| \quad \text{и столбцы } \| b \| = \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_m \end{matrix} \right\| ; \ \| o \| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{matrix} \right\| .$$

Поскольку для столбцов (как частного случая матриц) определены операции сравнения, сложения и умножения на число, то будем говорить, что столбец $\|b\|$ есть *линейная комбинация* столбцов $\| a_1 \|, \| a_2 \|, \ldots, \| a_n \|$, если $\exists$ числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, такие, что $\| b \| = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \| a_j \|$.

Определение Столбцы $\| a_1 \|, \| a_2 \|, \ldots, \| a_n \|$ будем называть *линейно зависимыми*, если существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, такие, что

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \| a_j \| = \| o \|, \quad \left(\sum_{j=1}^{n} | \lambda_j | > 0 \right).$$

Определение линейной независимости также дается аналогично как для векторов.

Теоремы, использующие понятие ранга матрицы

Предварительно напомним, что справедливы утверждения:

Лемма

Для того чтобы столбцы (строки) матрицы были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.
Если среди столбцов матрицы есть линейно зависимое подмножество, то множество всех столбцов этой матрицы также линейно зависимое.

Теорема (о базисном миноре).

Всякий столбец (строка) матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов (строк) этой матрицы.

Следствие

Для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы столбцы (строки) его матрицы были линейно зависимыми.

Теорема (о ранге матрицы).

Максимальное число линейно независимых столбцов матрицы равно максимальному числу линейно независимых строк и равно рангу этой матрицы.

Формула решения системы m линейных уравнений с n неизвестными

При построении общего решения системы (6.6.1) воспользуемся следующими легко проверяеыми утверждениями.

Лемма

1. **Любая линейная комбинация частных решений однородной системы (6.6.1) также является ее частным решением.**

2. **Сумма некоторого частного решения однородной системы (6.6.1) и некоторого частного решения неоднородной системы является частным решением неоднородной системы (6.6.1)**

3. **Разность двух некоторых частных решений неоднородной системы (6.6.1) является частным решением однородной системы (6.6.1).**

Откуда следует, что справедлива следующая, важная

Теорема А **Общее решение неоднородной системы уравнений есть общее решение однородной плюс некоторое частное решение неоднородной,**

Общее решение неоднородной СЛУ	=	*Общее решение однородной СЛУ*	+	*Частное решение неоднородной СЛУ*

Следует отметить, что в этой теореме частное решение неоднородной системы линейных уравнений может быть *любым*.

Вначале рассмотрим вопрос о нахождении общего решения однородной системы линейных уравнений.

Заметим, что, поскольку каждое частное решение системы линейных уравнений (6.6.1) представимо в виде n-компонентного столбца, то можно использовать понятия линейно зависимых и линейно независимых частных решений этой системы.

Основой для построения формулы общего решения однородной системы служит

Теорема B **Максимальное число линейно независимых частных решений однородной системы (6.6.1) равно** $n-\operatorname{rg}\|A\|$ **.**

Определение *Фундаментальной системой решений* для системы линейных уравнений (6.6.1) называется совокупность любых $n-\operatorname{rg}\|A\|$ частных, линейно независимых решений однородной системы (6.6.1), где n – число неизвестных в системе (6.6.1), а $\|A\|$ – ее основная матрица.

Матрица, столбцами (или строками) которой служат столбцы фундаментальных решений, называется *фундаментальной*.

В силу первого утверждения леммы *любая* линейная комбинация фундаментальных решений есть частное решение однородной системы (6.6.1).

С другой стороны, также справедлива

Теорема C **_Каждое_ частное решение однородной системы (6.6.1) может быть представлено в виде линейной комбинации частных решений, образующих нормальную фундаментальную систему решений.**

Исходя из двух последних утверждений и теоремы А, заключаем, что справедлива

Теорема D **_Общее_ решение неоднородной системы (6.6.1) представимо как сумма произвольной линейной комбинации фундаментальных частных решений однородной и некоторого частного решения неоднородной системы (6.6.1).**

Детально проиллюстрируем применение изложенной теории, решив

Пример 1. Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 6x_4 & = & -8\ , \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 9x_3 & - & 6x_4 & = & -12\ , \\ x_1 & & & + & 3x_3 & - & 6x_4 & = & -4\ , \\ & & x_2 & - & 6x_3 & & & = & -4\ . \end{array}\right. \qquad \text{(A)}$$

Решение: 1. Заменим исходную систему на равносильную ей, причем такую, что нахождение нужных нам частных решений, оказывается не сложной задачей.

Для этого вычтем первое уравнение последовательно из второго и третьего, не меняя при этом первого и четвертого уравнений. Получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 6x_4 & = & -8\ , \\ & & x_2 & - & 6x_3 & & & = & -4\ , \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 4\ , \\ & & x_2 & - & 6x_3 & & & = & -4\ . \end{array}\right.$$

Откуда получаем, исходная система будет равносильна системе вида

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 6x_4 & = & -8\ , \\ & & x_2 & - & 6x_3 & & & = & -4\ . \end{array}\right. \qquad \text{(B)}$$

2. Если преобразовать последнюю систему к виду

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & = & -8 & + & 3x_3 & + & 6x_4 & , \\ & & x_2 & = & -4 & + & 6x_3 & & & , \end{array}\right. \tag{C}$$

то, исходя из теоремы Крамера, можно утверждать, что неизвестные x_1 и x_2 имеют однозначно определяемые значения при любых, заранее заданных, значениях неизвестных x_3 и x_4.

3. Воспользуемся этим свойством системы (С) для нахождения нужных частных решений.

Во-первых, нам нужно какое-нибудь частное решение системы (A). Найдем его, положив, например, в системе (C) $x_3 = x_4 = 0$. Это даст $x_1 = x_2 = -4$.

4. Во-вторых, нам нужны фундаментальные решения однородной системы (A).

По определению, у однородной системы (A) правые части ее уравнений нулевые. Поэтому, выполнив для однородной системы те же преобразования, что и для неоднородной, мы получим систему вида

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3x_3 + 6x_4 , \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 = 6x_3 . \end{cases} \tag{D}$$

Для фундаментальности частных решений требуется, чтобы
- во-первых, они были линейно независимыми и,
- во-вторых, их число равнялось $n - \operatorname{rg}\|A\|$.

В нашем случае $n = 4$, а $\operatorname{rg}\|A\| = 2$.

Действительно, выполненные нами преобразования уравнений системы (A), *рангов матриц не меняют*, и, значит, ранги основных матриц систем (A) и (B) одинаковые. Тогда из формулы $n - \operatorname{rg}\|A\|$ следует, что нам нужно найти лишь *два* линейно независимых частных решения системы (D).

Поскольку неизвестные x_3 и x_4 в системе (D) произвольные, то (*докажите это самостоятельно*) линейную независимость пары частных решений этой системы гарантирует использование $x_3 = 1, x_4 = 0$ для первого решения и $x_3 = 0, x_4 = 1$ - для второго.

Следовательно, первое фундаментальное решение мы находим, решая систему $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ \quad\;\; x_2 = 6. \end{cases}$ Это дает $x_1 = -3, x_2 = 6$. Аналогично, второе фундаментальное решение определяется из системы $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ \quad\;\; x_2 = 0. \end{cases}$. То есть, $x_1 = 6, x_2 = 0$.

5. Запишем найденные решения в матричном виде: фундаментальные решения будут $\left\|\begin{matrix} -3 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right\|$ и $\left\|\begin{matrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\|$, а частное решение неоднородной системы $\left\|\begin{matrix} -4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\|$.

В этом случае общее решение однородной системы описывается формулой $\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\| = \lambda_1 \left\|\begin{matrix} -3 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right\| + \lambda_2 \left\|\begin{matrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\| \quad \forall \lambda_1, \lambda_2,$ а общее решение неоднородной

$$\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\| = \lambda_1 \left\|\begin{matrix} -3 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right\| + \lambda_2 \left\|\begin{matrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} -4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\| \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 .$$

Иное, полезное для приложений, условие совместности системы линейных уравнений, дает

Теорема (Фредгольма).

Для того чтобы система (6.6.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы *каждое* решение $\| y \| = \| \eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_m \|^{\mathrm{T}}$ *сопряженной* системы

$$\begin{cases} \alpha_{11}\eta_1 + \alpha_{21}\eta_2 + \dots + \alpha_{m1}\eta_m = 0, \\ \alpha_{12}\eta_1 + \alpha_{22}\eta_2 + \dots + \alpha_{m2}\eta_m = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1n}\eta_1 + \alpha_{2n}\eta_2 + \dots + \alpha_{mn}\eta_m = 0 \end{cases}$$

(или в матричном виде $\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| = \| o \|$) удовлетворяло условию $\sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i \eta_i = 0$ (или в матричном виде $\| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| = 0$).