ФОРМУЛА ГРИНА

Определение и свойства

Пусть ∂G есть кусочногладкий контур, являющийся границей плоской ограниченной области G.

Тогда, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в $\overline{G}$,
то справедлива *формула Грина*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{\partial G} Pdx + Qdy$$

Направление обхода контура таково, что в процессе обхода область G остается *слева*.

Пусть Γ_{AB} некоторая кусочногладкая линия целиком лежащая в области G, причем A - ее начало, а B -ее конец.
Тогда значение интеграла $\int\limits_{\Gamma_{AB}} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда $\exists u(x, y)$ такая, что $du = Pdx + Qdy$.
В этом случае $\int\limits_{\Gamma_{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A)$.

Необходимое условие независимости значения интеграла от пути интегрирования есть $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. А, если область G *односвязная*, то это условие достаточное.

Наконец, из формулы Грина следует, что площадь области G может находиться по формуле $S = \iint\limits_{G} dxdy = \frac{1}{2} \oint\limits_{\partial G} xdy - ydx$.

Пример 01. Вычислить $\oint\limits_{\partial G}(1-x^2)y\,dx + x(1+y^2)\,dy$, где $G:\ \{x^2+y^2 \le R^2\}$.

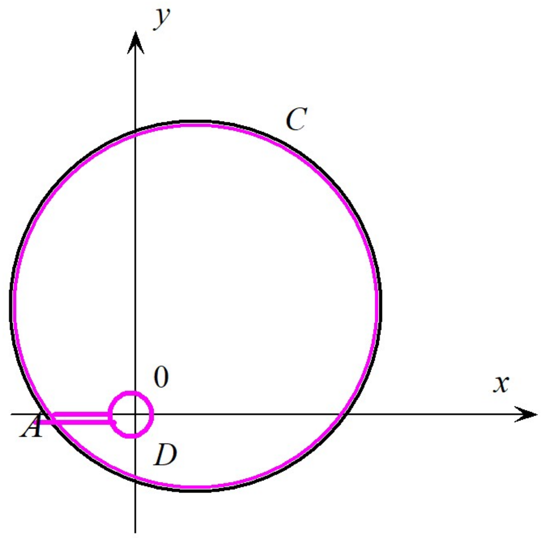
Решение: Имеем

$$\oint\limits_{\partial G}(1-x^2)y\,dx + x(1+y^2)\,dy = \iint\limits_{G}(1+y^2-1+x^2)\,dxdy = \iint\limits_{G}(x^2+y^2)\,dxdy$$

Перейдя к полярным координатам $= \iint\limits_{G^*} r^3\,drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^3 dr = \dfrac{\pi R^4}{2}$.

Пример 02. Вычислить $I_C = \oint\limits_{\partial G} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где ∂G - простой контур, обходящий область, оставляя ее слева..

Решение: Имеем $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Означает ли это, что $I_C = 0$? Не обязательно!



Дело в том, что исходный контур интегрирования может иметь внутреннюю особую точку 0.
Если контур C не охватывает эту точку, то ответ будет $I_C = 0$.

Если особая точка внутри "черного" контура, то построим "лиловый" контур (как показано на рисунке)
добавив разрез и достаточно малую окружность, охватывающую особую точку.

Пусть интегралы будут равны:

I_+ - по верхнему берегу разреза,

I_- - по нижнему берегу разреза,

I_D - по маленькой окружности вокруг 0,

I_L - по "лиловому контуру".

Имеем $I_- = -I_+$.

I_D вычислим непосредственно. Пусть параметризация маленькой окружности выбрана такой: $\begin{cases} x(t) = a\cos t, \\ y(t) = a\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi)$,

где a - достаточно малое положительное число.
Тогда, учитывая, что при обходе круга D, он остается справа, получим

$$I_D = \oint\limits_D \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int\limits_{2\pi}^{0} \frac{a\cos t \cdot a\cos t - a\sin t \cdot (-a\sin t)}{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = -\int\limits_0^{2\pi} dt = -2\pi .$$

Наконец, $I_L = 0$, поскольку внутри "лилового" нет особых точек.

Из адитивности интеграла следует, что $I_L = I_+ + I_D + I_- + I_C = 0$. Тогда искомый интеграл будет равен $I_C = 2\pi$.

ВЫБОР СТОРОНЫ ПОВЕРХНОСТИ
(Система координат *правая* прямоугольная!)

Параметризация гладкой поверхности S: $\vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad (u;v) \in \Omega \subseteq E^2$

или в координатах $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

определяет не только поверхность, но и ее сторону направлением вектора нормали $\vec{n}$.

Введем в рассмотрение векторы $\vec{r}_u{}'$ и $\vec{r}_v{}'$. Их векторное произведение есть вектор нормали $\vec{n} = [\vec{r}_u{}', \vec{r}_v{}']$.

Пример 03: для сферы с параметризацией

$$\begin{cases} x = R\cos u \cos v \\ y = R\sin u \cos v \\ z = R\sin v \end{cases} \quad \Omega = \begin{cases} 0 \le u \le 2\pi \\ -\dfrac{\pi}{2} \le v \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

При этом $\vec{n} = R^2 \begin{Vmatrix} \cos u \cos^2 v \\ \sin u \cos^2 v \\ \sin v \cos v \end{Vmatrix}$.и можно показать, что $\vec{r} = k\vec{n}$, где $k = R\cos v \ge 0$. Значит, это *внешняя* нормаль.

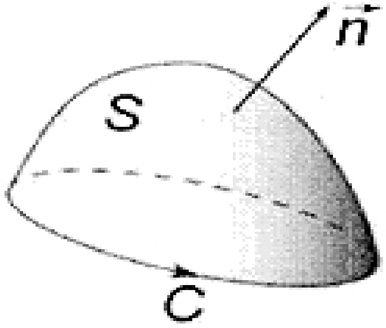
Направляющие косинусы

Из курса линейной алгебры известно, что в ОНБ $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ для координат вектора $\vec{r}$ верно $x_i = (\vec{r}, \vec{e}_{\backslash}) \quad i = 1,2.3$.

Если $\vec{n}$ - нормированный (с единичной длиной) вектор, то $\vec{n} = \begin{Vmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Vmatrix}$, где α, β, γ - углы между вектором $\vec{n}$ и ортами $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$.

Формула Стокса

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx$$



В формуле Стокса направление обхода контура C
и направление нормали к поверхности S должны быть 'согласованы'.

Согласование означает, что наблюдатель, движущийся по направлению обхода контура так, что при направлении нормали от ног к голове, видит поверхность слева от себя.

Заметим, что при $dz = 0$ формула Стокса превращается в формулу Грина.

Другой вариант записи формулы Стокса

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \det \left\| \begin{matrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{matrix} \right\| ds ,$$

где в первой строке стоят направляющие косинусы нормированного вектора $\vec{n}$, обеспечивающие согласование.

Пример 04. Вычислить $I_C = \oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, где C - окружность

$$\begin{Bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ a > 0 \\ x + y + z = 0 \end{Bmatrix},$$

ориентированная против часовой стрелки, если на нее смотреть с конца оси $0x$.

Решение: 1) Поскольку поверхность S не задана, в качестве S возьмем часть плоскости $x + y + z = 0$, ограниченной контуром C. По правилу согласования в нашем случае нормальный нормированный вектор $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

Наконец, векторное поле имеет вид $\vec{F} = \begin{Vmatrix} y \\ z \\ x \end{Vmatrix}$.

2) Для производных векторного поля $\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = -1 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = -1 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = -1 \end{cases}$.

Поэтому, окончательно,

$$I_C = \iint\limits_S ((-1)\frac{1}{\sqrt{3}} + (-1)\frac{1}{\sqrt{3}} + (-1)\frac{1}{\sqrt{3}})\,ds = -\frac{3}{\sqrt{3}}\iint\limits_S ds = -\pi\,a^2\sqrt{3}.$$

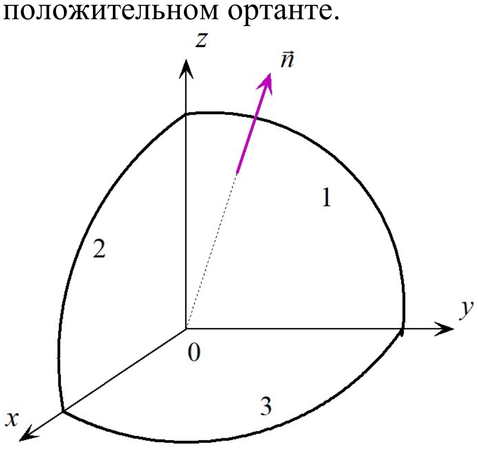
Формула Гаусса-Остроградского

Пусть S кусочно гладкая граница замкнутой области V с непрерывнодифференцируемым векторным полем, тогда справедлива формула *Гаусса-Остроградского*

$$\oint\!\!\!\oint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz\,,$$

если S внешняя сторона границы V .

Пример 05. Найти $\iint_S x^2 y\,dydz + xy^2 dzdx + xyz\,dxdy$, где S - часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ R > 0$,
находящаяся в положительном ортанте.



Решение: 1) Поскольку поверхность S незамкнутая, то замкнем ее частями координатных плоскостей 1, 2 и 3,
как показано на рисунке.

2) Заметим, что на координатных плоскостях 1 и 2 поверхностный интеграл нулевой, поскольку векторное поле нулевое,
т.к. здесь $P = Q = R = 0$.
На плоской границе 3 поверхностный интеграл также равен нулю, в силу
$\cos\alpha = \cos\beta = 0$ и $R = 0$.

3) Значит, можно применить формулу Гаусса-Остроградского для замкнутой области V .Имеем

$$\begin{cases} P(x,y,z) = x^2 y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial P}{\partial x} = 2xy, \\ Q(x,y,z) = xy^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2xy, \\ R(x,y,z) = xyz \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial R}{\partial z} = xy. \end{cases}$$

Откуда, переходя в тройном интеграле к сферическим координатам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi, \\ y = r\sin\varphi\cos\psi, \\ z = r\sin\psi, \end{cases}$$

получим

$$\iiint\limits_V 5xy\,dxdydz = 5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^R (r\cos\varphi\cos\psi)\cdot(r\sin\varphi\cos\psi)\,r^2\cos\psi\,dr =$$

$$= R^5 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\,d\psi = \frac{1}{3}R^5.$$