КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определения, обозначения и правила вычисления

В E^3 с ОНБ **заданы**:	**Скалярное поле** $f(\vec{r}) = f(x,y,z)$	**Векторное поле** $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{cases}$
Линия *Г* $\vec{r} = \vec{r}(t)\ t \in [\alpha,\beta]$ или в координатах $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ Функции $x(t),\ y(t),\ z(t)$ непрер. дифф. для $t \in [\alpha,\beta]$	*Криволинейный интеграл первого рода* $\int\limits_{\Gamma} f(x,y,z)\,dl =$ $= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt$	*Криволинейный интеграл второго рода* $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$ $= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t),y(t),z(t))x_t' + Q(x(t),y(t),z(t))y_t' + R(x(t),y(t),z(t))z_t')\,dt$
Поверхность *S* $\vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad (u;v) \in \Omega \subseteq E^2$ или в координатах $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ Функции $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)$ непр.о дифф. для $(u;v) \in \Omega \subseteq E^2$	*Поверхностный интеграл первого рода* $\iint\limits_{S} f(x,y,z)\,ds =$ $= \iint\limits_{\Omega} f(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\,dudv$, где $E = (\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial u})^2$ $G = (\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2$ $F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$	*Поверхностный интеграл второго рода* $\iint\limits_{S} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy =$ $= \iint\limits_{\Omega} \begin{vmatrix} P(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) & Q(\ldots\ldots\ldots) & R(\ldots\ldots\ldots) \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} dudv$

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

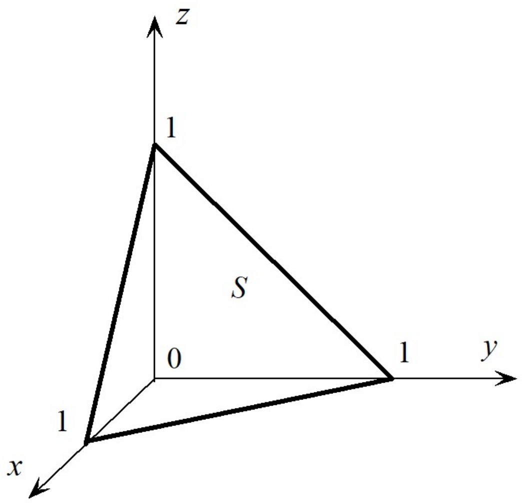
Свойства

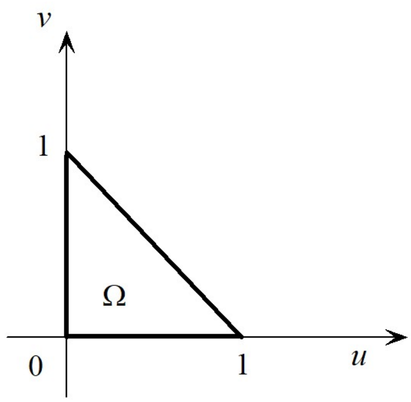
Криволинейный интеграл первого рода при изменении направления обхода не меняет знака, а второго рода - меняет на противоположный.

Поверхностный интеграл первого рода при изменении ориентации поверхности не меняет знака, а второго рода - меняет на противоположную.

Свойства криволинейного интеграла второго рода от полного дифференциала.

Пример 01 .Вычислить $\iint\limits_S xyz\,ds$, где $S:\ \begin{cases} x+y+z=1, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0, \\ z\ge 0 \end{cases}$.





Решение: 1) Делаем параметризацию поверхности $S:\ \begin{cases} x(u,v)=u, \\ y(u,v)=v, \\ z(u,v)=1-u-v \end{cases}$,

где $(u,v)\in\Omega$.

2) В нашем случае $f(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) = uv-u^2v-uv^2$,.

3) Находим $E=2, G=2, F=1$ $\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{3}$.

4) Формулируем и вычисляем интеграл $J=\iint\limits_\Omega (uv-u^2v-uv^2)\sqrt{3}\,dudv = \frac{\sqrt{3}}{120}$.

Пример 02 .Вычислить $\iint\limits_S z\,dxdy$, где $S: \ \left\{ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \right.$.

Решение: 1) Делаем параметризацию поверхности $S: \ \begin{cases} x(u,v)=a\cos u\cos v, \\ y(u,v)=b\sin u\cos v, \\ z(u,v)=c\sin v \end{cases}$,

где $(u,v)\in\Omega=\begin{cases} 0\le u<2\pi \\ -\frac{\pi}{2}\le v\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

2) Формулируем и вычисляем интеграл

$$J=\iint\limits_\Omega \det\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & c\sin v \\ -a\sin u\cos v & b\cos u\cos v & 0 \\ -a\cos u\sin v & -b\sin u\sin v & c\cos v \end{matrix}\right\| dudv=\iint\limits_\Omega Hc\sin v\,dudv,$$

где $H=ab\sin v\cos v$.

Таким образом, $J=\iint\limits_\Omega abc\sin^2 v\cos v\,dudv=\frac{4\pi}{3}abc$.