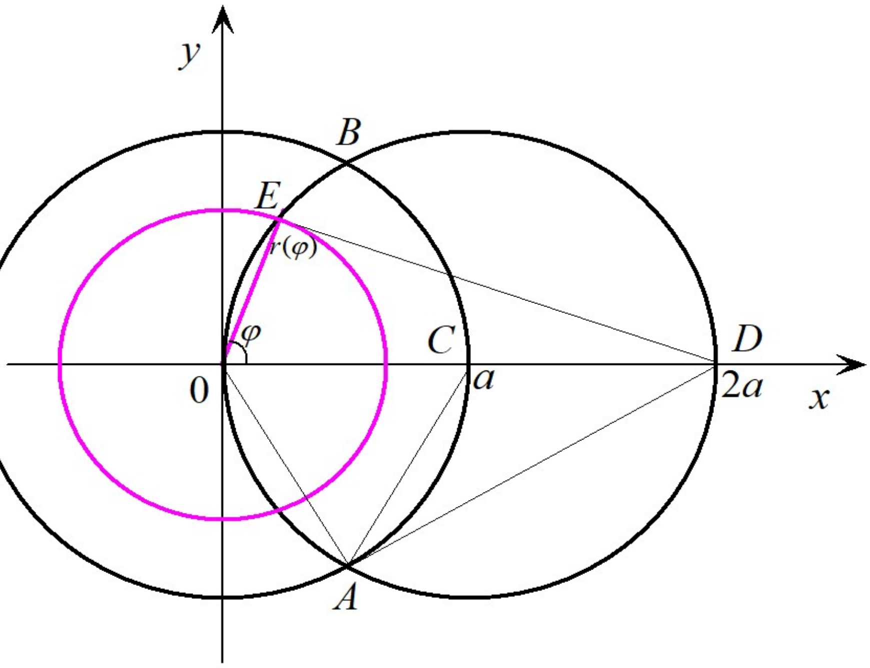
В следующей задаче укажем лишь идею решения и ответ. Проверьте его самостоятельно.



Задача 4: В интеграле $I = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в соответствующем повторном интеграле двумя способами, если $\Omega: \begin{cases} x^2 + y^2 \le a^2, \quad a > 0, \\ x^2 + y^2 \le 2ax. \end{cases}$

Решение: 1) Заметим, что треугольник $0AC$ правильный, а треугольник $0ED$ прямоугольный. Откуда можно получить, что $r(\varphi)=2a\cos\varphi$.

2) Область в данной задаче - сдвоенный сегмент $0BCA$. При этом область элементарна при обеих последовательностей одномерного интегрирования, но при внешней переменной φ верхняя граница состоит из трех функций, а при внешней переменной r - из одной.

Ответ: 1) если внешняя переменная последовательного интегрирования φ, то

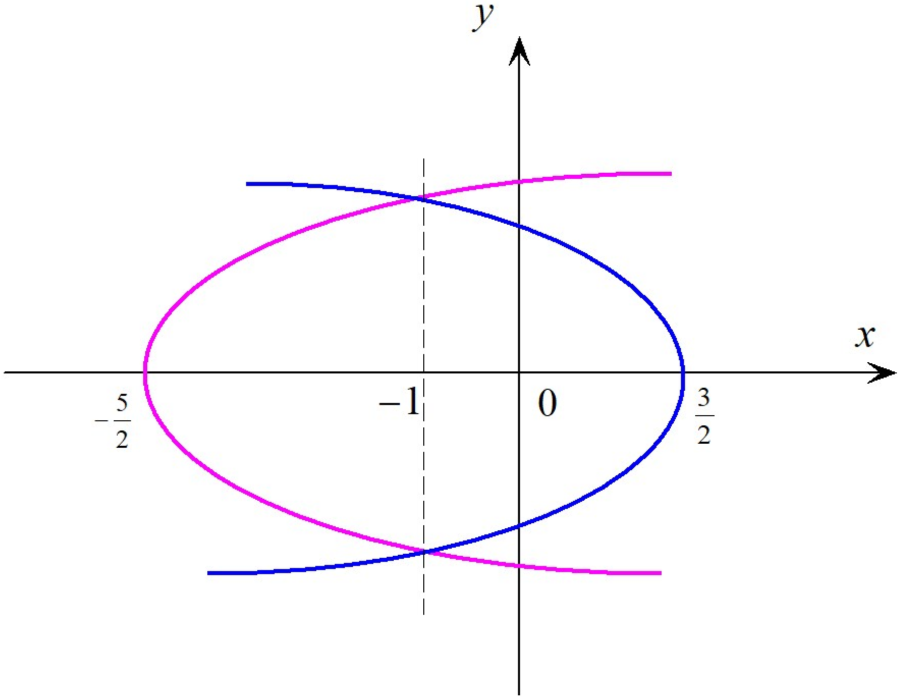
$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{0}^{2a\cos\varphi}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr+$$

$$+\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{0}^{a}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr+\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{2a\cos\varphi}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr.$$

2) если внешняя переменная последовательного интегрирования r, то

$$I=\int\limits_{0}^{a}rdr\int\limits_{-\arccos\frac{r}{2a}}^{\arccos\frac{r}{2a}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)d\varphi.$$

Задача 5: На плоскости Oxy в прямоугольной системе координат найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9 - 6x$ и $y^2 = 10x + 25$.

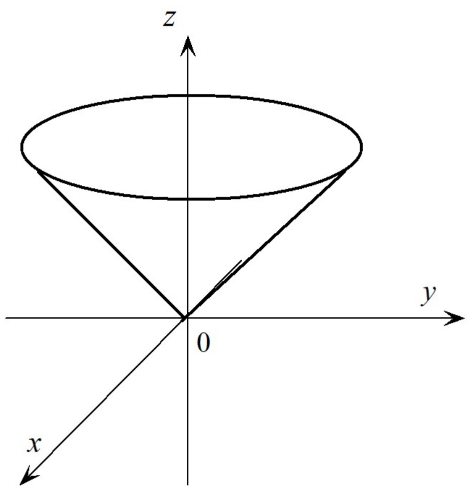


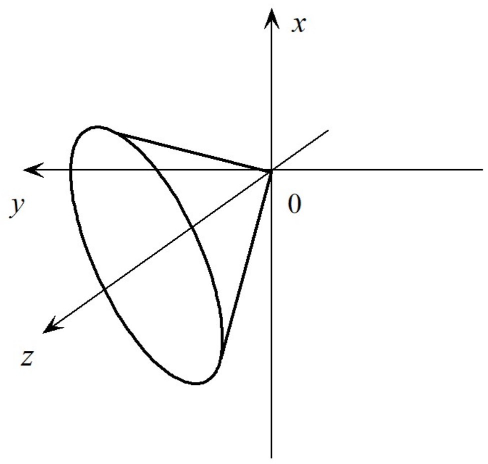
Решение: 1) Воспользуемся теоремой о том, что площадь области Ω определяется формулой $S = \iint\limits_{\Omega} dxdy$. Заметим, что координаты точек пересечения парабол $\left\| \begin{matrix} -1 \\ \pm\sqrt{15} \end{matrix} \right\|$.

2) В данном случае удобнее воспользоваться элементарностью области Ω относительно оси Ox. В этом случае имеем

$$S = \iint\limits_{\Omega} dxdy = \int\limits_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy \int\limits_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} dx = \int\limits_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} x \left| \begin{matrix} \frac{9-y^2}{6} \\ \\ \frac{y^2-25}{10} \end{matrix} \right. dy = \int\limits_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(\frac{9-y^2}{6} - \frac{y^2-25}{10} \right) dy = \frac{16\sqrt{15}}{3}.$$

Рассмотрим теперь примеры стереометрических задач.





Задача 6: Переставить пределы повторного интегрирования в порядке $\{z, y, x\}$ для интеграла

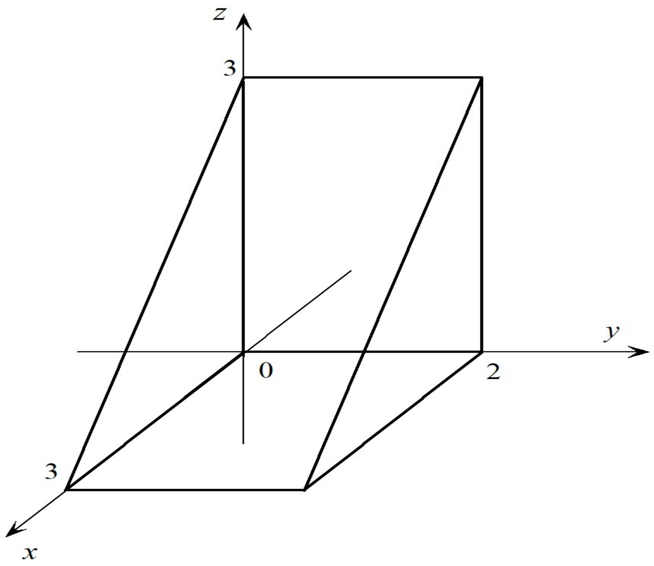
$$J = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dz .$$

Решение: 1) Заметим, что тело V ограничено снизу частью конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, а сверху плоскостью $z = 1$.

2) После указанного изменения порядка интегрирования, применяя к области V метод секущих плоскостей, получаем

$$J = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{-z}^{z} dy \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)dx .$$

Задача 7: Вычислить интеграл $J = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, где область V лежит в положительном орманте и ограничена плоскостями $y=2$ и $x+z=3$.

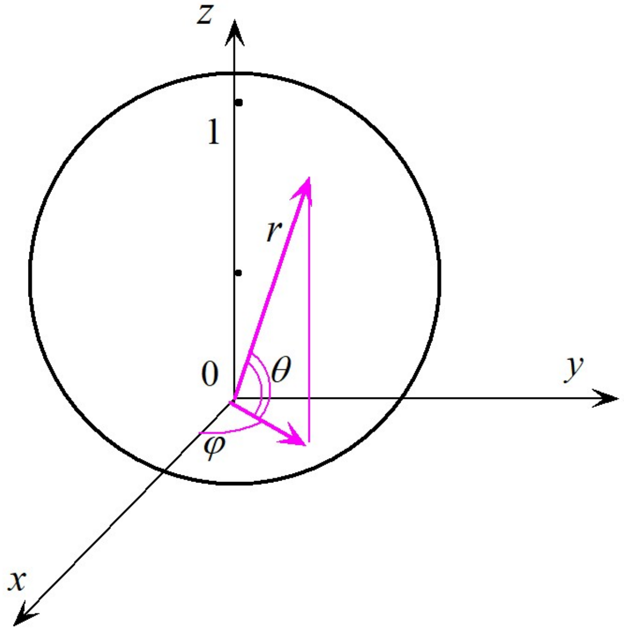


Решение: 1) В данной задаче V есть прямая треугольная призма. Координаты точек в V удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} 0 \le z \le 3-x, \\ 0 \le y \le 2, \\ 0 \le x \le 3. \end{cases}$

2) Поэтому (проверьте выкладки)

$$J = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{3-x} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = \ln\sqrt{2} - \frac{1}{8} \; .$$

Задача 8: Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, где область V ограничена поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = z$.



Решение: 1) Область V есть шар радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right\|$, а каноническое уравнение его поверхности $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

2) Перейдем в сферическую систему координат по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases} \text{ с модулем якобиана } |J| = r^2\cos\theta .$$

3) Поскольку на границе области V имеем $r^2 = r\sin\theta$, то здесь будет $r = \sin\theta$.

Откуда получаем, что в сферических координатах $V^* = \left\{ \begin{array}{c} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le r \le \sin\theta. \end{array} \right\}$

4) В итоге

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz = \iiint\limits_{V^*} r^3 \cos\theta \, dr\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sin\theta} r^3 dr = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{10}.$$