КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Двойные интегралы

В начале, для большей наглядности, рассмотрим двумерный случай.

Пусть дана дважды непрерывная в некоторой, измеримой по Жордану (с мерой μ), области $\Omega \subseteq E^2$ с ОНБ функция $f(x,y)$.

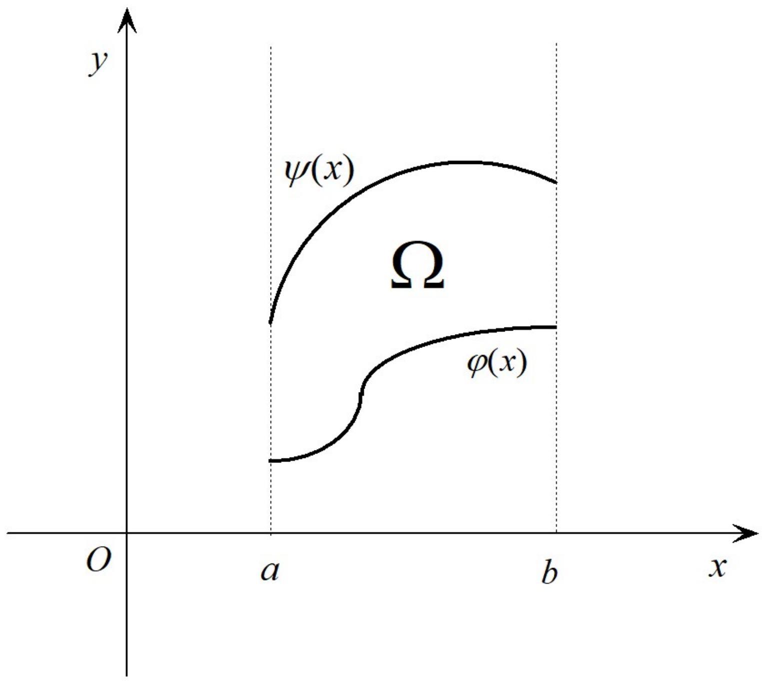
И пусть для этого множества выполнено разбиение $\{\Omega_k, k=[1,N]\}$ с мелкостью этого разбиения, определяемого некоторым функционалом $\tau = T(\{\mu(\Omega_k), k=[1,N]\})$.

Далее, в каждом Ω_k выбрана произвольная точка $\begin{Vmatrix} x_k \\ y_k \end{Vmatrix}$, совокупность которых обозначим Θ_τ.

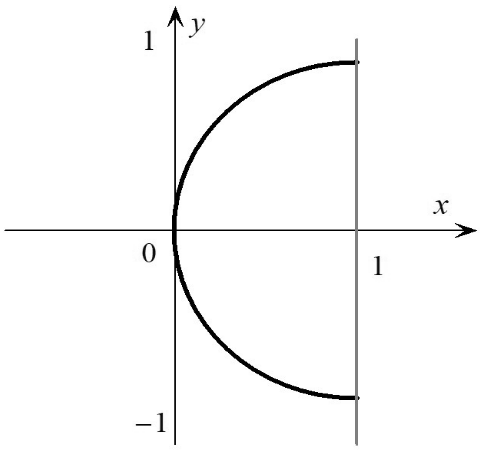
Тогда *римановской суммой* от функции $f(x,y)$ по области Ω называется выражение вида $\sigma_\tau(f;\Theta_\tau) = \sum\limits_{k=1}^{N} f(x_k, y_k)\mu(\Omega_k)$.

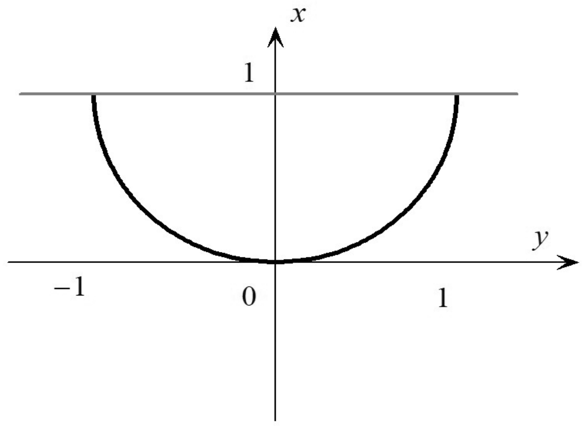
Двойным интегралом функции $f(x,y)$ по области Ω называется число $J=\lim\limits_{\tau\to 0}\sigma_\tau$ - *предел* ее римановской суммы при мелкости разбиения $\tau\to 0$.

Область Ω называется *элементарной относительно оси Oy*, если существуют функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ $x\in[a,b]$, такие, что $\Omega=\begin{cases}\varphi(x)\le y\le\psi(x),\\ x\in[a,b].\end{cases}$



Если область Ω элементарна относительно оси Oy, то двойной интеграл, обозначаемый как $J=\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$, равен $J=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$.





Пример 1: Найти $J=\iint\limits_{\Omega} xy^2\,dxdy$, если $\Omega=\left\{\begin{matrix} 0\le x\le 1, \\ y^2\le x. \end{matrix}\right\}$

Решение: 1) Заметим, что область Ω элементарна относительно оси Oy и $\varphi(x)=-\sqrt{x},\psi(x)=\sqrt{x}$. Поэтому

$$J=\iint\limits_{\Omega} xy^2\,dxdy=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y^2dy=\int\limits_0^1 x\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{2}{3}\int\limits_0^1 x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{2}{3}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{4}{21}.$$

2) Можно также заметить, что область Ω элементарна относительно оси Ox с $\varphi(y)=y^2,\psi(y)=1$. Значит, двойной интеграл можно считать иначе

$$J=\iint\limits_{\Omega} xy^2\,dxdy=\int\limits_{-1}^1 y^2dy\int\limits_{y^2}^1 xdx=\int\limits_0^1 y^2\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_{y^2}^1\right)dy=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 y^2(1-y^4)dy=$$

$$=\int\limits_0^1 y^2(1-y^4)dy=\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^7}{7}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}=\frac{4}{21}.$$

3) Результаты получились одинаковые. Это теорема!

Пример 2: Найдите двойной интеграл $J = \iint\limits_{\Omega} (x+2y)\,dxdy$, если область имеет вид $\Omega = \left\{ \begin{array}{c} 2 \le x \le 3, \\ x \le y \le 2x. \end{array} \right\}$, выбрав наиболее удобный порядок последовательного интегрирования.

Решение: 1) Заметим, что область Ω элементарна относительно оси Oy с $\varphi(x) = x, \psi(x) = 2x$. Относительно оси Ox она не элементарна, но ее можно разбить на три части, каждая из которых элементарна относительно оси Ox. Однако придется считать три двойных интеграла по областям I, II, III. Свойство адитивности интеграла.

2) Поэтому лучше считать так:

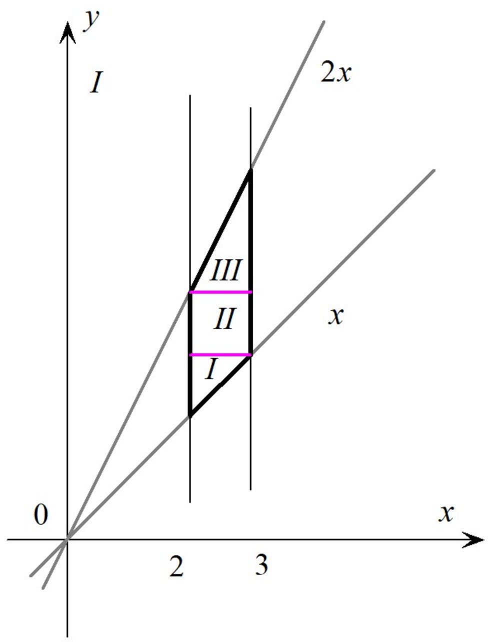
$$J = \iint\limits_{\Omega} (x+2y)\,dxdy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{2x} (x+2y)dy = \int\limits_2^3 [(xy+y^2)\Big|_x^{2x}]dx =$$

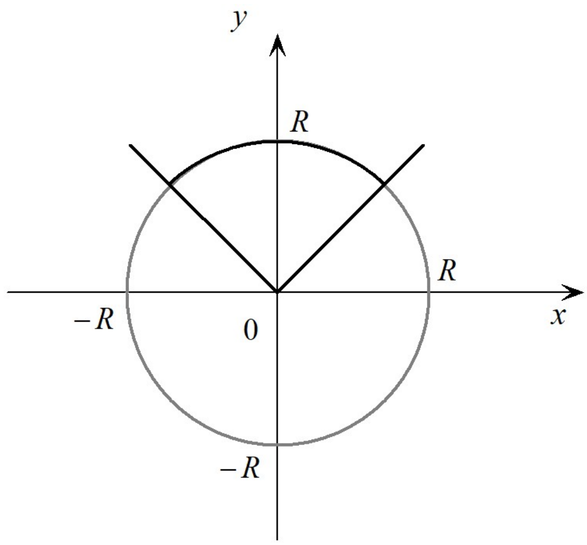
$$= \int\limits_2^3 [(2x^2+4x^2)-(x^2+x^2)]dx = 4\int\limits_2^3 x^2 dy = \frac{76}{3}.$$

Нередко вычисление двойных интегралов можно упростить, сделав подходящую нелинейну замену переменных.

Пример 3: Найдите двойной интеграл $J=\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,dxdy$, если область имеет вид

$\Omega=\begin{Bmatrix} x^2+y^2\le R^2, \\ |x|\le y. \end{Bmatrix}$, перейдя в полярную систему координат.





Решение: 1) Область Ω элементарна относительно оси Oy с $\varphi(x)=|x|, \psi(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, но интегралы получаются довольно сложные.

2) Существенно проще вычисления оказываются, если перейти в полярную систему координат по формулам $\begin{cases} x=r\cos\alpha, \\ y=r\sin\alpha. \end{cases}$.

При такой замене $dx\,dy=r\,dr\,d\alpha$ (модуль якобиана равен r), и задача сводится к нахождению двойного интеграла вида

$$J=\iint\limits_{\Omega^*}(r\cos\alpha+r\sin\alpha)\,r\,dr\,d\alpha\,,$$

где область Ω^* является *прямоугольником* $\begin{cases} 0\le r\le R, \\ \dfrac{\pi}{4}\le\alpha\le\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$ в переменных r и α.

3) Поскольку интегралы по полярным координатам оказываются на прямоугольнике Ω^* независимыми, то вычисления сильно упрощаются:

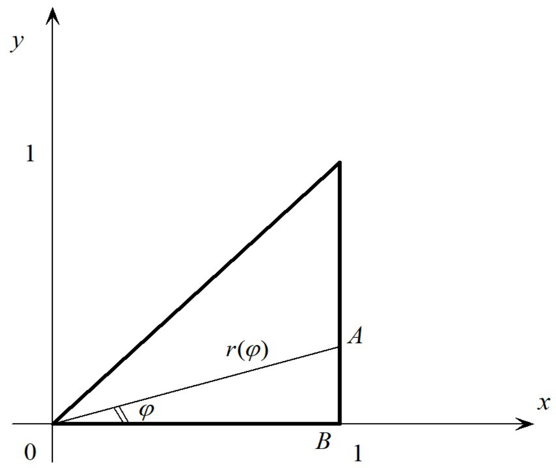
$$J = \iint\limits_{\Omega^*} (r\cos\alpha + r\sin\alpha)\, r\, dr\, d\alpha = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\alpha + \sin\alpha) d\alpha \int\limits_0^R r^2 dr =$$

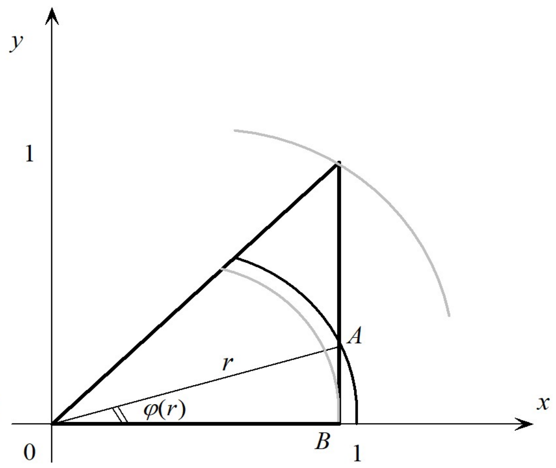
$$= \frac{R^3}{3}(\sin\alpha - \cos\alpha)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{R^3\sqrt{2}}{3}\,.$$

Задача 3: в интеграле $I = \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в соответствующем повторном интеграле двумя способами, если

1) $\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ y \ge 0, \\ x \ge y, \end{cases}$ 2) $\Omega : \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ x + y \le 1. \end{cases}$

Решение: 1)





а) Пусть φ - внешняя переменная, а r - внутренняя. Тогда $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r dr$,

где $r(\varphi) = |0A|$.

В нашем случае, из $\Delta 0AB$ следует, что $\cos\varphi = \dfrac{1}{r(\varphi)}$. Поэтому $r(\varphi) = \dfrac{1}{\cos\varphi}$ и, окончательно,

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r dr .$$

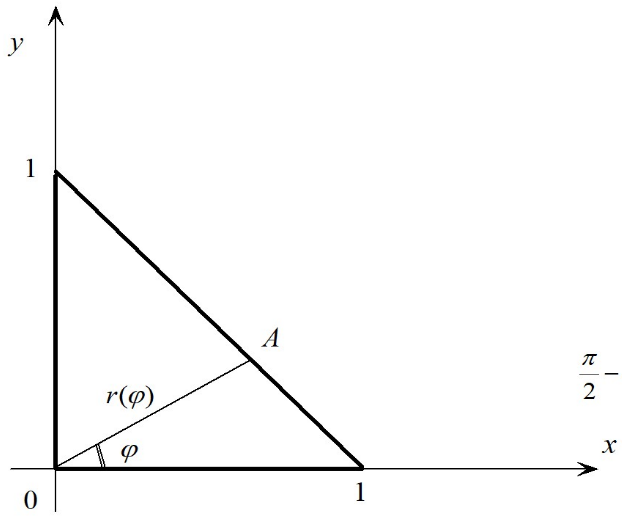
b) Пусть r - внешняя переменная, а φ - внутренняя. Тогда

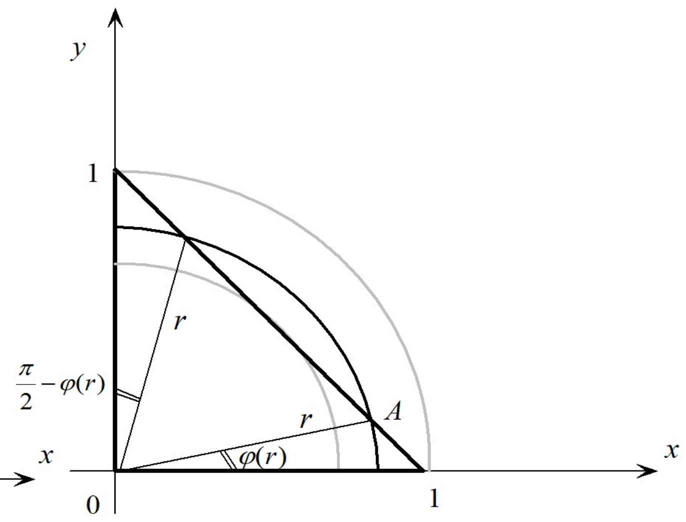
$$I = \int\limits_0^1 r dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi + \int\limits_1^{\sqrt{2}} r dr \int\limits_{\varphi(r)}^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi\,,$$

где из $\Delta 0AB$ находим, что $\cos\varphi(r) = \dfrac{1}{r}$ или $\varphi(r) = \arccos\dfrac{1}{r}$. Т.е.

$$I = \int\limits_0^1 r dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi + \int\limits_1^{\sqrt{2}} r dr \int\limits_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi.$$

2)





а) Пусть φ - внешняя переменная, а r - внутренняя. Тогда $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr$,

где $r(\varphi)=|0A|$.

В нашем случае, из принадлежности точки *A* гипотенузе следует, что $x_A+y_A=1$ или, в полярных координатах $r(\varphi)\cos\varphi+r(\varphi)\sin\varphi=1 \quad\Rightarrow\quad r(\varphi)\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=1$

Поэтому $r(\varphi)=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})}$ и, окончательно $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr.$

b) Пусть r - внешняя переменная, а φ - внутренняя. Тогда удобно разбить промежуток изменения r на два: $r \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ и $r \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$. Тогда получим, что интеграл по всей области представим в виде

$$I = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} r dr \int\limits_0^{\varphi(r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} r dr \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varphi(r)}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi ,$$

где функция $\varphi(r)$ находится из условия принадлежности точки A гипотенузе:

$$r\cos\varphi(r) + r\sin\varphi(r) = 1 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi)\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\varphi(r) + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{r\sqrt{2}} .$$

То есть, $\varphi(r) = \arcsin\dfrac{1}{r\sqrt{2}} - \dfrac{\pi}{4}.$