Пример 2. В E^3 исследовать на экстремум функцию $u(x,y,z) = x - y + 2z$ при условии $x^2 + y^2 + 2z^2 = 16$.

Решение: 1) Функция Лагранжа для этой задачи будет

$$L = x - y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 16).$$

Условия ее стационарности вместе с уравнением связи образуют систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -1 + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2 + 4\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 16 \end{cases}$$

Если из первых трех уравнений выразить $x=-\frac{1}{2\lambda}, y=\frac{1}{2\lambda}, z=-\frac{1}{2\lambda}$ и подставить в четвертое, то получим из $\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{2}{4\lambda^2}=16$, что $\lambda=\pm\frac{1}{4}$.

2) Получаем две стационарные точки, подозрительные на экстремум:

$$\lambda=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ z=-2 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \lambda=-\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \\ z=2 \end{cases}$$

3) Проверяем достаточные условия. Находим

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 4\lambda$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} = 0$$

Откуда $d^2L = 2\lambda(dx)^2 + 2\lambda(dy)^2 + 4\lambda(dz)^2$. Эта квадратичная форма положительно определена при $\lambda = \frac{1}{4}$ и отрицательно определена при $\lambda = -\frac{1}{4}$.
Кроме того, должно выполняться равенство $2xdx + 2ydy + 4zdz = 0$. Однако, последнее равенство на знаковую определенность d^2L не повлияет и может быть проигнорировано. Итак

$\lambda = \frac{1}{4}$ $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$ точка минимума и $\lambda = -\frac{1}{4}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$ .....точка максимума.

Пример 3. В E^2 исследовать на экстремум функцию $u(x,y)=x^2+xy+y^2$ при условии $x^2+y^2=1$.

Решение: 1) Функция Лагранжа в этой задаче

$$L=x^2+xy+y^2+\lambda(x^2+y^2-1).$$

2) Условия ее стационарности будут

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+y+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=x+2y+2\lambda y=0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}(2+2\lambda)x+y=0\\ x+(2+2\lambda)y=0\end{cases}$$

2) Имеем, что, если с, то $x=y=0$, а это очевидно не решение. Если же $\det\begin{Vmatrix}2+2\lambda & 1\\ 1 & 2+2\lambda\end{Vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\lambda=-\dfrac{1}{2}\\ \lambda=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$, то возможны два случая.

3) $\lambda = -\frac{1}{2}$, при этом $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{array} \right.$.

Матрица Гессе будет иметь вид $\begin{Vmatrix} 2+2\lambda & 1 \\ 1 & 2+2\lambda \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. Она положительно полуопределена и тут требуется дополнительное исследование.

Здесь $d^2L = (dx)^2 + 2dxdy + (dy)^2 = (dx + dy)^2$, при этом должно быть выполнено равенство $xdx + ydy = 0$. А поскольку в этих точках $x + y = 0$, то $dx = dy$. Значит, $d^2L = 4(dx)^2$ и это *минимумы*.

4) $\lambda = -\frac{3}{2}$, при этом $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{array} \right.$.

Матрица Гессе будет иметь вид $\begin{Vmatrix} 2+2\lambda & 1 \\ 1 & 2+2\lambda \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$. Она отрицательно полуопределена и тут также требуется дополнительное исследование.

Здесь $d^2L = -(dx)^2 + 2dxdy - (dy)^2 = -(dx - dy)^2$, и при этом должно быть выполнено равенство $xdx + ydy = 0$. А поскольку в этих точках $x - y = 0$, то $dx = -dy$. Значит, $d^2L = -4(dx)^2$ и это точки *максимумов*.