

Пример 2. В  $E^2$  исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y.$$

Решение: 1) Для бесконечно дифференцируемой функции  $f(x, y)$  найдем все ее стационарные точки, т.е. точки, подозрительные на экстремум. Эти точки находятся из *необходимого* условия

$$\text{grad } f(x, y) = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 12 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Откуда получаем четыре точки, подозрительные на экстремальность

$$\left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} \right\|.$$

2) Проверим выполнение *достаточных* условий в стационарных точках.

$$\text{Матрица Гессе имеет вид} \quad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 6y & 6x \\ 6x & 6y \end{matrix} \right\|.$$

Эта матрица симметрическая и в ОНБ может рассматриваться как матрица самосопряженного преобразования. Которая, в свою очередь, в ОНБ из собственных векторов имеет диагональный вид. Причем на главной диагонали стоят собственные значения.

Результаты применения метода приведем в следующей таблице

Стац. точка	Матрица Гессе	Знаковая определенность	Характ. уравн. и собств. значения	Экстремум?
$\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$	Положительная	$(12 - \lambda)^2 - 36 = 0$ $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 18$	Строгий минимум
$\begin{vmatrix} -1 \\ -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix}$	Отрицательная	$(-12 - \lambda)^2 - 36 = 0$ $\lambda_1 = -6, \lambda_2 = -18$	Строгий максимум
$\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix}$	Нет	$(6 - \lambda)^2 - 144 = 0$ $\lambda_1 = -6, \lambda_2 = 18$	Нет
$\begin{vmatrix} -2 \\ -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix}$	Нет	$(-6 - \lambda)^2 - 144 = 0$ $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -18$	Нет

Пример 3. В  $E^2$  исследовать на экстремум  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ .

Решение: 1) Необходимое условие экстремума  $\text{grad } f(x, y) = 0$  или

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x - y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x - y) = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x^3 + 4y^3 = 0 \Rightarrow y = -x.$$

Откуда, подставив в первое уравнение системы, получим  $4x^3 - 8x = 0$ .

Значит, стационарных точек три:  $\left\| \begin{matrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{matrix} \right\|$ ,  $\left\| \begin{matrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{matrix} \right\|$ ,  $\left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$ .

2) Проверяем достаточные условия. Имеем матрицу Гессе следующего вида  $\begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix}$ . В первых двух стационарных точках справедливо равенство  $x^2 = y^2 = 2$  и потому в этих точках матрица Гесса  $\begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}$ . Следовательно, в первых двух точках мы имеем строгие локальные минимумы.

В третьей стационарной точке - в начале координат - матрица Гессе равна  $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}$  и квадратичная форма (5) является отрицательно полуопределенной. Значит, ни одно из трех достаточных условий *не применимо*.

Воспользуемся тем, что изменение значения исследуемой функции в начале координат определяется следующей формулой:

$$\Delta f(x, y) = dx^4 + dy^4 - 2(dx - dy)^2.$$

В этом случае, выходя из начала координат по направлению  $dx = dy$ , мы получим, что  $\Delta f(x, y) > 0$ , а выходя по направлению  $dx = -dy$ , будем иметь  $\Delta f(x, y) = 2dx^4 - 8dx^2 < 0$  при достаточно малых  $|dx|$ . Это означает, что начало координат не является экстремальной точкой для исследуемой функции.

Пример 4. В  $E^2$  исследовать на экстремум  $f(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1$ .

Решение: 1) Необходимое условие экстремума  $\text{grad } f(x, y) = 0$  или

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 4y + 4 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - y + 1 = 0.$$

Множество стационарных точек неограниченно и есть прямая в  $E^2$ .

2) Проверяем достаточные условия. Имеем матрицу Гессе, одинаковую для всех стационарных точек  $\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$ . Значит, в каждой стационарной точке квадратичная форма (5) является положительно полуопределенной и ни одно из трех достаточных условий *не применимо*.

В этой ситуации можно воспользоваться тем, что исследуемая функция может быть записана так:

$$f(x, y) = (2x - y)^2 + 2(2x - y) + 1 = (2x - y + 1)^2.$$

Откуда следует, что каждая точка прямой  $2x - y + 1 = 0$  является точкой минимума функции  $f(x, y)$ , но нестрогого, поскольку в любой ее окрестности имеются другие точки с тем же значением  $f(x, y)$ .

Пример 5. В  $E^2$  исследовать на экстремум  $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Решение: 1) Необходимое условие экстремума утверждает, что либо  $\text{grad } f(x, y) = 0$ , либо он не существует.

Нетрудно видеть, что в любой точке, кроме начала координат, вектор

$$\text{grad } f(x, y) \text{ имеет вид } \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Среди таких точек стационарных нет, поскольку длина вектора градиента для них равна единице.

Остается рассмотреть точку начало координат. в ней вектор градиента не существует, поскольку не существуют пределы, являющиеся частными производными по  $x$  и  $y$ . Действительно, из курса математического анализа известно, что пределы вида

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(0+dx,0) - f(0,0)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{dx^2}}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{-|dx|}{dx}$$

и

$$\lim_{dy \rightarrow 0} \frac{f(0,0+dy) - f(0,0)}{dy} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{dy^2}}{dy} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{-|dy|}{dy}$$

не существуют. Заметим, что использование формул (6) для обоснования недифференцируемости исследуемой функции в начале координат, является неверным.

Поскольку применение критериев экстремума с данной задаче невозможно, воспользуемся непосредственно определением. Имеем следующую оценку знака изменения значения исследуемой функции при произвольном отклонении аргументов от начала координат:

$$f(0+dx,0+dy) - f(0,0) = 1 - \sqrt{dx^2 + dy^2} - 1 = -\sqrt{dx^2 + dy^2} < 0 \quad \forall dx, dy,$$

из которой следует, что начало координат является точкой строго максимума.

Пример 6. В  $E^2$  исследовать на экстремум функцию  $u(x, y)$ , заданную неявно условием  $F(x, y, u) = 1 - x^2 - y^2 - u^2 = 0$ . (7)

Решение: 1) Найдем производные функции  $u(x, y)$ , заданной неявно:

$$\text{имеем } u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u}, \quad u'_y = -\frac{F'_y}{F'_u}, \text{ где}$$
$$F'_x = -2x, \quad F'_y = -2y, \quad F'_u = -2u.$$

Тогда, в силу необходимых условий экстремальности

$$\text{из } \begin{cases} u'_x = -\frac{x}{u} = 0 \\ u'_y = -\frac{y}{u} = 0 \end{cases} \text{ следует, что точка } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ подозрительная}$$

на экстремум.



2) Для применения достаточных условий найдем матрицу Гессе в подозрительной точке, получим

$$\begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{u} + x \frac{u'_x}{u^2} & x \frac{u'_y}{u^2} \\ y \frac{u'_x}{u^2} & -\frac{1}{u} + y \frac{u'_y}{u^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{u} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{u} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

С другой стороны из (7) имеем, что в точке  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$  переменная  $u = \pm 1$ , то есть уравнение (7) в окрестности этой точки задает две различные функции.

Используя достаточные условия экстремума, из (8) получаем, что у одной из этих функций с  $u = -1$  имеем минимум, а при  $u = 1$  - максимум.

К данному заключению можно было также придти, заметив, что в окрестности точки  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$  из уравнения (7) следует, что либо  $u = \sqrt{1-x^2-y^2}$ , либо  $u = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ .

Пример 7. Пусть непрерывная функция  $F(x)$  имеет в точке  $x^*$  локальный экстремум. Верно ли утверждение: в этом случае найдется такая окрестность точки  $x^*$ , для которой  $F(x)$  монотонна как в правой, так и в левой полуокрестности этой точки? Ответ обосновать.

Решение: Нет, неверно. Пример: непрерывная функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x^2 \left(2 + \cos \frac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0 \end{cases}$$

имеет в точке  $x^* = 0$  минимум, но не является монотонной в любой полуокрестности этой точки.