Производная функции в точке

Значение функции и ее предел суть локальные числовые характеристики, позволяющие количественно описывать функцию как в некоторой точке, так и в малой ее окрестности. Однако этих характеристик оказывается недостаточно, когда требуется оценить не только сами значения функции, но и относительную скорость их изменения. Для такой оценки используется специальная количественная характеристика функции – *производная функции в точке.* Дадим ее определение.

Определение 5.1. *Производной функции в точке* называется число, равное пределу отношения величины приращения значения функции к величине приращения ее аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Символически это определение означает: для функции $y = f(x)$ ее производная в точке x_0, обозначаемая как $f'(x_0)$ или $y'_x(x_0)$, равна

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}\,. \qquad (5.1)$$

Действительно, если значение аргумента было x_0 , а стало $x_0 + t$, то его приращение очевидно равно $(x_0 + t) - x_0 = t$. Аналогично, если значение функции было $f(x_0)$, а стало $f(x_0+t)$, то ее соответствующее приращение составляет $f(x_0 + t) - f(x_0)$.

Из данного определения следует, что функция $y = f(x)$ должна иметь значения в некоторой окрестности точки x_0 , а также быть *непрерывной* в точке x_0. Последнее условие необходимо (но не достаточно!) для существования производной функции в точке, поскольку лишь для непрерывной функции предел приращения значения функции равен нулю при стремлении к нулю приращения аргумента.

Однако, даже для непрерывной функции предел (5.11) является неопределенностью вида "$\frac{0}{0}$", то есть заключение о существовании (или не существовании) производной в точке можно делать лишь после "раскрытия" этой неопределенности.

Поясним определение 5.1 следующими примерами.

Пример 5.1. Найти производную функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 2$.

Вначале решим эту задачу для произвольной фиксированной точки x_0 . Пусть приращение аргумента в точке x_0 равно t, найдем соответствующее приращение значения данной функции, использовав формулу «куб суммы двух чисел»,

$$f(x_0+t)-f(x_0) = (x_0+t)^3-x_0^3 = \left(x_0^3 + 3x_0^2t + 3x_0t^2 + t^3\right)-x_0^3 = 3x_0^2t+3x_0t^2+t^3 \ .$$

Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{3x_0^2t + 3x_0t^2 + t^3}{t} = \lim_{t\to 0} \left(3x_0^2 + 3x_0t + t^2\right) = 3x_0^2 \ .$$

Подставив в полученное выражение $x_0 = 2$, найдем, что искомое значение $y'_x(2)$ – производной для функции $y = x^3$ в точке 2, равно 12.

Пример 5.2. Найти производную функции $y = \sqrt{x+1}$ в точке $x_0 = 3$.

Как и в предыдущем, примере вначале решим эту задачу для произвольной фиксированной точки x_0 . Пусть приращение аргумента в точке x_0 равно t. Найдем соответствующее приращение значения данной функции

$$f(x_0 + t) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + t + 1} - \sqrt{x_0 + 1}\,.$$

Тогда, после умножения на сопряженное выражение, получим

$$f'\,(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{x_0 + t + 1} - \sqrt{x_0 + 1}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{x_0 + t + 1} + \sqrt{x_0 + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0 + 1}}\,.$$

Подставив в полученное выражение $x_0 = 3$, найдем, что искомое значение $y'_x(3)$ – производной для функции $y = \sqrt{x+1}$ в точке 3, будет равно $\frac{1}{4}$.

Пример 5.3. Найти производную функции $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$.

Для данной функции, в силу $x_0 = 0$

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{|x_0 + t| - |x_0|}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} = \lim_{t \to 0} \left[\begin{array}{r} 1\ ,\ \text{если } t > 0, \\ -1\ ,\ \text{если } t < 0. \end{array} \right. \tag{5.3}$$

Откуда можно сделать заключение, что у рассматриваемой функции нет производной в нуле, так как можно указать две различные числовые последовательности, например, $\left\{ t_n = \dfrac{1}{n} \right\} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ и $\left\{ \tau_n = -\dfrac{1}{n} \right\} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ такие, что $f'\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$ и $f'\left(-\dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -1$, то есть предел (5.2) не существует.

Заметим, что из существования производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 следует непрерывность этой функции в x_0. Действительно, пусть существует конечный предел

$$A = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} .$$

Тогда

$$f(x_0+t) - f(x_0) = At + o(t) , \tag{5.4}$$

поскольку величина $\dfrac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} - A$ бесконечно малая. И переходя в равенстве (5.4) к пределу при $t \to 0$, получаем выполненное условие непрерывности $\lim\limits_{t\to 0} f(x_0+t) = f(x_0)$.

Обратное неверно: из непрерывности функции существование производной в точке может не следовать (см. пример 5.3).

Завершая обсуждение определения 5.1 отметим, что в математических текстах используются различные способы обозначения производной функции в точке. Помимо использованных выше, к наиболее часто встречающимся обозначениям относятся

$$y'_x(x)\big|_{x=x_0} \; ; \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \; ; \quad f'(x)\big|_{x=x_0} \; .$$

Понятие производной функции в точке допускает его *геометрическую интерпретацию*, смысл которой лучше всего иллюстрирует задача построения касательной к графику функции в некоторой его точке.

Допустим, требуется провести касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке A с координатами $\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$. Выберем на графике другую точку B , имеющую координатное представление $\begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Vmatrix}$. Поскольку обе эти точки лежат на графике, то справедливы равенства $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$.

Проведем через выбранные точки секущую AB , (см. рис. 1.) Нетрудно видеть, что уравнение прямой, проходящей через эти точки, имеет вид $y = k(x - x_0) + y_0$, где значение *углового коэффициента* $k = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg}\alpha$.

Начнем теперь, “скользя” по графику, приближать точку B к точке A . Тогда $x_1 \longrightarrow x_0$ и, значит, $t = x_1 - x_0 \longrightarrow 0$. В пределе секущая станет искомой касательной, значение углового коэффициента которой равно

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = f'(x_0) \ ,$$

где $t = x - x_0$.

Таким образом, мы приходим к заключению, что *значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной в этой точке к графику функции.*

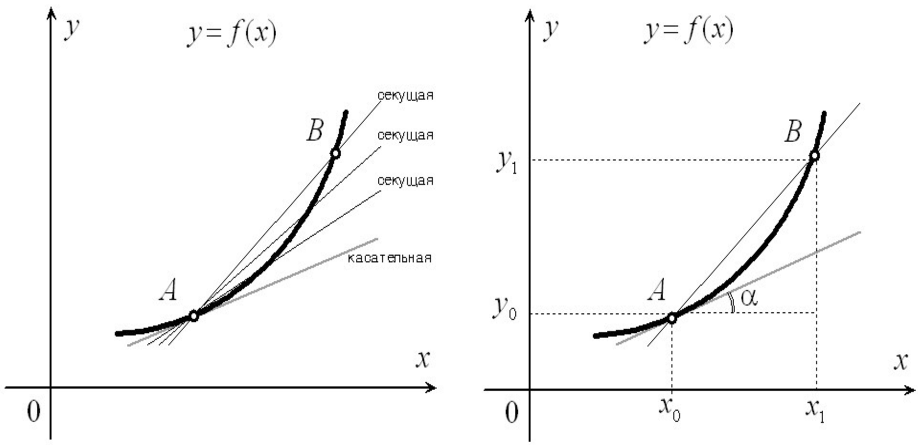

Рис. 1. Геометрический смысл производной функции в точке.

В заключение отметим, что из геометрически очевидной горизонтальности касательной к графику функции в ее экстремальных точках, из вышеприведенных рассуждений следует необходимость *равенства нулю значения производной функции в этих точках* (если, разумеется, эта производная существует).

Производная функция

Поиск значений производных функций в точках (непосредственно по определению 5.1) в большинстве случаев является сложной задачей, требующей для своего решения значительных затрат вычислительных усилий. На практике оказывается гораздо удобнее применять иной подход, основанный на следующих соображениях.

Используемый в определении 5.1 предельный переход осуществляется по вспомогательной переменной t, в то время как, значение x_0 – аргумента функции $f(x)$, для которой ищется производная в точке, является фиксированным числовым параметром. Если изменить x_0, то значение предела (5.1), вообще говоря, изменится. Однако для каждого конкретного x_0 оно *одно,* поскольку если предел существует, то он единственен.

Поэтому определение 5.1 можно рассматривать как правило, по которому каждому значению x_0, принадлежащему некоторому подмножеству области определения функции $y = f(x)$, ставится в соответствие единственное число $f'(x_0)$, то есть можно сказать, что таким образом задана некоторая новая *функция,* значение которой в точке x_0 равно $f'(x_0)$.

Эту функцию принято называть *производной функцией* от $y = f(x)$ и обозначать как $f'(x)$, операцию же поиска $f'(x)$ называют *дифференцированием.* В случае, когда для $f(x)$ существует $f'(x)$, говорят также, что функция $f(x)$ *дифференцируемая.* С другой стороны, функцию $y = F(x)$ такую, что $F'(x) = f(x)$, называют *первообразной* для $y = f(x)$. Операция ее нахождения называется *интегрированием.*

Например, воспользовавшись решением задачи 5.1.1, можно утверждать, что функция производная от $y = x^3$ есть $y = 3x^2$, поскольку использованный нами метод раскрытия неопределенности годится для *любого* x_0. Теперь для нахождения значения производной функции $y = x^3$ в любой точке x_0 достаточно подставить вместо x значение x_0 в формулу $3x^2$.

Производные функции принято также обозначать как y'_x ; $\dfrac{dy}{dx}$; $y'(x)$. В тех случаях, когда функция зависит более чем от одной переменной, идентификатор переменной, по которой берется производная, указывается явно в виде нижнего индекса. Например, для функции $f(x,p)$ – зависящей от x и p, запись $f'_x(x,p)$ означает производную по переменной x, в то время как p считается фиксированным параметром. Такую производную иногда называют *частной производной* и обозначают как $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Стоит также отметить, что в русскоязычных математических текстах понятия “производная функции в точке” и “производная функция” часто обозначаются одним и тем же словом – “производная”, полагая, что из контекста понятно, о чем идет речь. В английском языке, например, этой проблемы не существует, поскольку производная функции в точке это – derivation, а производная функция – derivative.

Очевидно, что использовать производные функции для нахождения значений производной функции в точке гораздо удобнее, чем пользоваться для этой цели определением 5.1. Но тогда возникает вопрос: как находить производные функции?

Ответ следующий – надо использовать:

1) *таблицу производных* для некоторого небольшого набора элементарных функций, полученных непосредственно при помощи определения 5.1, и
2) *правила дифференцирования*, которые позволяют выражать производные одних функций через производные других. Обоснование их справедливости, основанное на использовании определения 5.1 и свойств пределов функций, можно найти в полном курсе математического анализа.

Таблица 6.1

$f(x)$	$f'(x)$
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$a^x, \quad a > 0, a \neq 1$	$a^x \ln a$
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a \lvert x\rvert, \quad a > 0, a \neq 1$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Первая из этих таблиц имеет вид (6.1), но поскольку очевидно, что этой таблицы недостаточно, чтобы получать производные *любых* функций, задаваемых формулами, то следует использовать также и таблицу, описывающую *правила выражения производных одних функций, через производные других,*

Таблица 6.2

1°	$(\ f(x)+g(x)\ )'=f'(x)+g'(x)$
2°	$(\ C\cdot f(x)\ )'=C\cdot f'(x)$, где C – const
3°	$(\ f(x)\cdot g(x)\ )'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
4°	$(\ f(g(x))\ )'_x=f'_g(g)\cdot g'_x(x)$

Проиллюстрируем использование таблиц 6.1 и 6.2 на следующих примерах.

Пример 6.1. Пусть требуется найти производные функции от

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1}{x}, \quad y = \frac{\sin x}{x} \quad \text{и} \quad y = e^{\arccos x}.$$

Решение.

1) Сравнение правил 1° и 3° таблицы 6.2 убеждает, что легче дифференцировать сумму функций, чем произведение, поэтому вначале выполним почленное деление, то есть будем искать производную функции

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1}{x}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1}\right)' =$$

а, используя первые формулы таблиц 6.1 и 6.2, получаем

$$= -\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} - x^{-2} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\,.$$

2) В таблице 6.2 нет формулы для дифференцирования дроби (хотя во многих учебниках Вы ее можете встретить), поэтому сначала преобразуем данную функцию в произведение, и лишь потом применим правило 3° таблицы 6.2

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \big((\sin x)\cdot(x^{-1})\big)' = (\sin x)'\cdot(x^{-1}) + (\sin x)\cdot(x^{-1})' =$$

$$= (\cos x)\cdot x^{-1} + (\sin x)\cdot(-x^{-2}) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,.$$

3) Вначале напомним, что

$$g(x) = \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \ ,$$

и потому, согласно первому правилу таблицы 6.2 и предпоследней строке таблицы 6.1,

$$g'_x(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, .$$

Тогда,

$$y'_x = \left(e^{\arccos x}\right)'_x = \left(e^{g(x)}\right)'_x = \left(e^g\right)'_g \cdot g'_x(x) =$$

$$= e^g \cdot g'_x(x) = e^g \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} \, .$$

В заключение данного параграфа отметим, что в процессе исследования свойств функции иногда оказывается необходимым использование характеристики, показывающей *скорость изменения величины производной функции* в окрестности точки x_0. Эта характеристика называется *производной второго порядка* или, просто, *второй производной.* Ее принято обозначать как

$$y''_{x=x_0}\ ; \qquad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0} ; \qquad y''(x)|_{x=x_0}\ ,$$

а поиск значения этой числовой характеристики сводится к вычислению предела вида

$$f''(x_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f'(x_0+t)-f'(x_0)}{t}\,. \tag{6.1}$$

Поскольку вторые производные функции в точке (как пределы функции) определены однозначно, то можно задать новую функцию, значениями которой являются числа, получаемые по формуле (6.1). Эту функцию (производную от производной) называют *второй производной функцией от функции* $y = f(x)$. Для ее нахождения следует использовать те же правила, что и для первой производной функции. Например, если $y = \ln|x|$, то, согласно таблице 5.2.1, $y' = \dfrac{1}{x}$, а, в свою очередь, производная функция от $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ по той же таблице 5.2.1 равна $(-1)x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$. То есть, $(\ln|x|)'' = -\dfrac{1}{x^2}$.