

Функция одной переменной

Напомним определение функции как специального способа описания связи между переменными величинами.

Определение 4.1.1. Будем говорить, что задана *функциональная зависимость* или, просто *функция*, если указано **правило**, по которому **каждому** числу x , принадлежащему числовому множеству X , поставлено в соответствие **единственное** число y , принадлежащему числовому множеству Y .

Множество X принято называть *областью определения* функции, а множество Y - *областью ее значений*. Саму функцию принято обозначать

$$y = f(x), \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Наконец, x - независимая переменная, называется *аргументом*, а y - зависимая переменная, *значением функции* или, просто, *функцией*.

Достаточно часто функцию задают только формулой соответствия. В этом случае *предполагается*, что областью определения является множество чисел, для которых выполнимы все использованные в записи этой формулы операции. За область значений при этом принимается множество чисел, являющихся значениями функции соответствующие *всем возможным* значениям аргумента.

Приведем примеры использования этого определения.

Пример 4.1.1. 1) $y = x + \frac{1}{x}$

Область определения: очевидно $X : \{\forall x \neq 0\}$ или, что то же самое,

$$\{(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\}.$$

Область значений: оценку области значений данной функции выполним в два этапа. Сначала рассмотрим случай $x > 0$. Для любых таких значений x будет справедливо неравенство

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0, \text{ или } \left(x - 2\sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) \geq 0, \text{ откуда } x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Для случая $x < 0$ оценку области значений можно получить, воспользовавшись равенством

$$(-x) + \frac{1}{(-x)} = -\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

из которого в силу неравенства

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ для всех } x > 0$$

имеем

$$x + \frac{1}{x} \leq -2 \text{ для всех } x < 0.$$

Окончательно получаем, что областью значений данной функции является множество $Y : \{(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)\}$.

$$2) y = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

Область определения: находится из условия

$$x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -1, \end{cases}$$

поскольку знаменатель дроби не может принимать нулевых значений. Других ограничений на вычисление значений функции нет, поэтому область определения будет

$$X : \{(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)\}.$$

Область значений: область значений данной функции можно находить, используя тот факт, что ее область определения образуется произвольными вещественными числами (за исключением -2 и -1 .) Рассмотрим формулу $y = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$ как уравнение с неизвестной x и решим его, считая y некоторым фиксированным параметром. Для этого преобразуем данное равенство к виду, стандартному для квадратных уравнений

$$(y - 2)x^2 + (3y - 2)x + (2y - 1) = 0, \quad (3.1.1)$$

корни которого определяются формулой

$$x_{1,2} = \frac{-(3y - 2) \pm \sqrt{D}}{2(y - 2)} \quad y \neq 2,$$

где дискриминант $D = (3y - 2)^2 - 4(y - 2)(2y - 1)$.

Условие существования вещественных значений x будет $D \geq 0$, или, в нашем случае,

$$\begin{aligned} & (3y - 2)^2 - 4(y - 2)(2y - 1) = \\ & = y^2 + 8y - 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in \left\{ (-\infty, -2\sqrt{5} - 4] \cup [2\sqrt{5} - 4, +\infty) \right\} . \end{aligned}$$

Иначе говоря, x может принимать вещественные значения лишь либо при $y \leq -2\sqrt{5} - 4 \approx -8.4$, либо при $y \geq 2\sqrt{5} - 4 \approx 0.4$. Следовательно, область значений данной функции образуют числа y , удовлетворяющие либо первому, либо второму из полученных неравенств и не равные 2.

Наконец заметим, что, хотя приведенные рассуждения не применимы для $y = 2$, ибо в этом случае уравнение (3.1.1) не квадратное, а линейное – вида $4x + 3 = 0$, тем не менее число 2 принадлежит области значений, поскольку у этого линейного уравнения имеется вещественное решение $x = -\frac{3}{4}$, являющееся значением аргумента при котором значение функции равно 2. Следовательно,

$$Y : \left\{ (-\infty, -2\sqrt{5} - 4] \cup [2\sqrt{5} - 4, +\infty) \right\} .$$

В заключение обсуждения понятия функциональной зависимости отметим, что функции принято классифицировать по наличию или отсутствию у нее свойства *периодичности* и свойства *четности*.

Определение 4.1.2. Функцию $y = f(x)$ будем называть *периодической*, если существует число $T \neq 0$ такое, что для любого $x \in X$ выполнено $x \pm T \in X$ и

$$f(x + T) = f(x).$$

Число T в этом случае называется *периодом* функции $y = f(x)$.

Пример 4.1.2. К периодическим относятся следующие функции:

$$\begin{aligned} y = \sin x & \quad \text{с периодом } T = 2\pi, \\ y = \cos 3x & \quad \text{с периодом } T = \frac{2\pi}{3}, \\ y = \operatorname{tg} x & \quad \text{с периодом } T = \pi. \end{aligned}$$

Определение 4.1.3. Пусть X – область определения функции $y = f(x)$, симметрична относительно точки $x = 0$, тогда эта функция называется:

четной, если $\forall x \in X : f(-x) = f(x)$,

нечетной, если $\forall x \in X : f(-x) = -f(x)$,

Пример 4.1.3. Классификация функций по четности:

$y = x^2$ – четная,

$y = x^3$ – нечетная,

$y = \sin x$ – нечетная,

$y = \cos x$ – четная,

$y = 3^x$ – не является ни четной, ни нечетной.

Следует иметь в виду, что, хотя существуют функции не относящиеся ни к четным, ни к нечетным, в симметричной области определения каждую из них можно представить как сумму некоторой четной функции и некоторой нечетной. Для этого можно использовать, например, формулу

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Так для функции $y = 3^x$ разложение в сумму четной и нечетной будет иметь вид

$$y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2} + \frac{3^x - 3^{-x}}{2}.$$

Предел функции и его свойства

Рассматривая значения некоторой функции $f(x)$ в малой окрестности точки $x = a$, в большом числе случаев можно заметить, что эти значения оказываются тем ближе к некоторому числу A , чем меньше значение x отличается от a . При этом величина A может отличаться от значения $f(a)$ и даже существовать в тех случаях, когда точка a не принадлежит области определения функции $f(x)$.

Примером может служить функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, которая не имеет никакого значения в точке $x = 0$, но определена в любой ее окрестности и значение которой тем меньше отличается от единицы, чем меньше абсолютная величина x .

Если такое число A существует, его называют *пределом функции* $f(x)$ при x стремящемся к a , и данный факт символически обозначают как

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Приведем теперь строгие определения понятия предела функции.

Определение 4.2.1. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при x стремящемся к a , если для любой числовой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$, числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ *сходится* к A , то есть выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

В символической форме это определение можно записать так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, если $\forall \{x_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a : \{f(x_n)\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$.

или же

Определение 4.2.2. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при x стремящемся к a , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что для всех x удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ справедливо $|f(x) - A| < \varepsilon$,

что символически записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 4.2.1 принято называть *определением предела функции по Гейне*, а определение 4.2.2 — *определением по Коши*. Имеет место теорема, утверждающая *эквивалентность* этих определений.

Важную роль также играют *отрицания* определений 4.2.1 и 4.2.2.

Отрицание 4.2.1. Число A не является *пределом функции* $f(x)$ при x стремящемся к a , если найдется числовая последовательность $\{x_n^*\}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^* = a$ и $x_n^* \neq a$, а числовая последовательность $\{f(x_n^*)\}$ не сходится к A , то есть выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^*) \neq A$.

В символической форме это определение можно записать так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A$, если $\exists \{x_n^*\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^*) \neq A$.

аналогично строится и

Отрицание 4.2.2. Число A не является *пределом функции* $f(x)$ при x стремящемся к a , если найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существует x_0 удовлетворяющее условию $0 < |x_0 - a| < \delta$, при котором $|f(x_0) - A| \geq \varepsilon_0$,

что символически записывается так:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 : \quad \exists x_0 : 0 < |x_0 - a| < \delta \quad \longrightarrow \quad |f(x_0) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Для того, чтобы установить, что предел функции $f(x)$ при x стремящемся к a не существует, достаточно найти одну последовательность $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^* = a$ для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^*)$ не существует.

Или же построить две сходящиеся последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^* = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^* = a$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^*) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n^*)$.

В вычислительной практике нередко встречаются случаи, когда предельный переход к точке a выполняется только в ее *левой* или только в *правой* полуокрестности. Такие пределы называют *односторонними*. Первый случай принято обозначать как $x \rightarrow a - 0$, а второй случай — $x \rightarrow a + 0$.

Кроме того, если значение функции при предельном переходе остается больше A (*стремление сверху*), то величина предела обозначается как $A + 0$, а, если меньше A (*стремление снизу*), то как $A - 0$.

Наконец, отметим, что определения предела применимы не только когда a обозначает некоторое конечное число, но и могут быть модифицированы для случаев, в которых a является одним из следующих трех символов ∞ , $+\infty$ или $-\infty$. Также возможны варианты, когда A не является конечным числом, а принимает одно из символических значений ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

В следующей таблице приведены примеры обозначений различных видов предельных переходов и их формулировок в кванторах по Коши.

Обозначение	Формулировка
$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = 7$	$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x : 0 < x - 3 < \delta_\varepsilon \rightarrow f(x) - 7 < \varepsilon$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5-0$	$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x : x > \delta_\varepsilon \rightarrow -\varepsilon < f(x) - 5 < 0$
$\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) = -\infty$	$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x : -\delta_\varepsilon < x - 4 < 0 \rightarrow f(x) < -\varepsilon$
$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq -1$	$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 : \exists x_0 : 0 < x_0 - 2 < \delta \rightarrow f(x_0) + 1 \geq \varepsilon_0$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq \infty$	$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 : \exists x_0 : x_0 < -\delta \rightarrow f(x_0) < \varepsilon_0$

Подчеркнем: предел функции при x стремящемся к a является *локальной* числовой характеристикой функции (так же, как и $f(a)$ — ее значение), то есть относящейся к точке a .

Для одной и той же точки значение функции и величина её предела, равно как и их существование, независимы друг от друга: они могут существовать одновременно и быть равными или не равными друг другу, и также могут не существовать, как вместе, так и по отдельности. Поясним это следующими примерами.

Пример 4.2.1. Найти, используя определение 4.2.1, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Возьмем произвольную числовую последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$, тогда n -й член последовательности $\{f(x_n)\}$ будет иметь вид $\frac{2x_n}{x_n^2 + 1}$. Найдем ее предел, пользуясь известными нам свойствами пределов числовых последовательностей.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n}{x_n^2 + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^2 + 1} = \\ &= \frac{2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) + 1} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3 + 1} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что функция $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ определена (имеет значение) для любого конечного x , в том числе и для $x = 3$. В рассматриваемом случае $f(3) = \frac{2 \cdot 3}{3^2 + 1} = \frac{3}{5}$, то есть значение функции и ее предел в точке $x = 3$ совпадают.

Однако, если рассмотреть поведение этой же функции при x стремящимся к ∞ , то мы получим иной случай. С одной стороны, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ не определена, то есть не имеет никакого значения при $x = \infty$. Но, с другой стороны, для $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n}{x_n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \cdot \frac{2}{1 + \frac{1}{x_n^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x_n^2}} = 0 \cdot 2 = 0.\end{aligned}$$

Итак, эта функция при $x \rightarrow \infty$ имеет предел, равный 0, то есть $f(x) \rightarrow 0$, но не имеет никакого значения при $x = \infty$.

Пример 4.2.2. Рассмотрим функцию, называемую *сигнатурой числа*, обозначаемую как $y = \operatorname{sgn} x$ и определяемую формулой (см. рис.1)

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

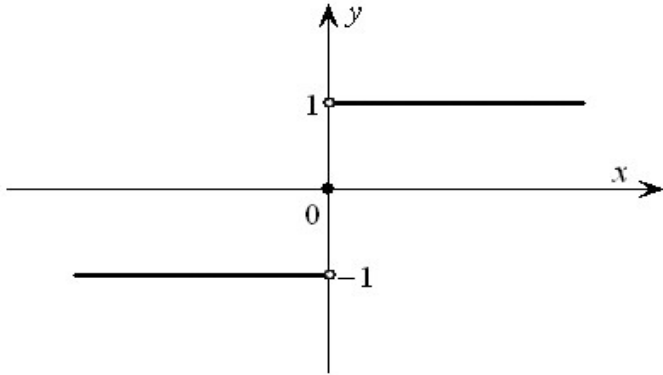


Рис. 1. График функции $y = \operatorname{sgn} x$

Эта функция при $x = 0$ имеет нулевое значение, то есть $\operatorname{sgn} 0 = 0$, однако предел $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ не существует. Действительно, возьмем две

числовые последовательности с $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = -\frac{1}{n}$. Они обе имеют своим пределом число 0. Но, по определению сигнатуры, $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} x_n =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{n} \right) = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} \left(-\frac{1}{n} \right) = -1$, а это противоречит определению 3.3.1.1, поскольку значение предела $\operatorname{sgn} x_n$ должно быть *одинаковым для всех* последовательностей $\{x_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Наконец, возможно, что у функции в некоторой точке есть неравные друг другу, как значение, так и предел. Примером может служить функция $y = |\operatorname{sgn} x|$, значение которой в нуле есть 0, а предел равен 1.

Также возможен случай, когда у функции в некоторой точке нет значения и не существует предел. Используя отрицание определения предела функции по Гейне, убедимся, что такая ситуация имеет место для $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ при $x = 0$.

Действительно, рассмотрим две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, у которых

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \quad \text{и} \quad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обе эти последовательности бесконечно малые и для них верны предельные равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 1$. Значит, по отрицанию определения предела по Гейне $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ не существует.

Свойства пределов функций аналогичны свойствам пределов последовательностей. Приведем основные из них, предполагая, что, используемые в формулировках, пределы существуют.

$$1^\circ. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$2^\circ. \lim_{x \rightarrow a} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$4^\circ. \text{ Если, кроме того } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

5°. Аналог теоремы “о двух милиционерах”: если для всех x , принадлежащих некоторой окрестности точки a , верно $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, то $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$.

Применение определений предела функции 4.2.1 и 4.2.2 (также как и в случае числовых последовательностей) затруднено тем, в них используется значение предела A .

Этого недостатка лишено необходимое и одновременно достаточное условие существования конечного предела функции, называемое *критерием Коши* и формулируемого в виде следующей теоремы.

Критерий Коши. Для того, чтобы функция $f(x)$ имела в точке a конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного ε существовало положительное число δ_ε такое, что для любых $x_1 \in (a - \delta_\varepsilon, a + \delta_\varepsilon)$ и $x_2 \in (a - \delta_\varepsilon, a + \delta_\varepsilon)$, выполнялось неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

В кванторах критерий Коши имеет формулировку

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x_1 \in (a - \delta_\varepsilon, a + \delta_\varepsilon) \text{ и } x_2 \in (a - \delta_\varepsilon, a + \delta_\varepsilon) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Соответственно, отрицание критерия Коши, т.е. критерий случая, когда функция $F(x)$ не имеет конечного предела в точке a , может формулироваться так:

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 : \exists x_{10} \in (a - \delta, a + \delta) \text{ и } x_{20} \in (a - \delta, a + \delta) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow |f(x_{10}) - f(x_{20})| \geq \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Пример 4.2.3. При помощи отрицания критерия Коши доказать, что $y = \sin \frac{1}{x}$ не имеет конечного предела в точке $x = 0$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon_0 = 1 \forall \delta > 0 : \text{при } k \geq \left\lceil \frac{1}{2\pi\delta} \right\rceil + 1 \\ \exists x_{10} = \frac{1}{2\pi k} \in (-\delta, \delta) \text{ и } x_{20} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k} \in (-\delta, \delta) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow |f(x_{20}) - f(x_{10})| = |1 - 0| = 1 = \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Понятие предела функции может быть использовано для построения, полезных в вычислительных процедурах, аппроксимаций элементарных функций.

Например, если нас интересуют свойства исследуемой функции лишь в малой окрестности некоторой точки, то удобным инструментом аппроксимации является специальная функция $o(x)$, называемая «о-малой».

Определение 4.2.3. Функция $o(x)$ определена в некоторой окрестности точки $a = 0$ и для нее справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0.$$

Заметим, что конкретный вид функции $o(x)$ особой роли не играют.

Ниже приведены примеры построения с помощью $o(x)$ аппроксимаций некоторых элементарных функций.

$$\begin{aligned}(1+x)^r &= 1+rx+o(x), \\ e^x &= 1+x+o(x), \\ \sin x &= x+o(x^2), \\ \cos x &= 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3), \\ \operatorname{tg} x &= x+o(x^2), \\ \ln(1+x) &= x+o(x), \\ \operatorname{arcsin} x &= x+o(x^2).\end{aligned}$$

Определение 4.2.4. Функция $f(x)$ называется *эквивалентной* в точке x_0 функции $g(x)$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 1$. Эквивалентность принято обозначать так: $f(x) \sim g(x)$.

О функции $f(x)$ говорят, что она есть $O(g(x))$ в точке x_0 , если существует число $\epsilon > 0$ такое, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C$.

Для эквивалентности функций $f(x)$ и $g(x)$, например, в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = g(x) + o(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

При вычислении пределов эквивалентные функции можно заменять одну на другую.

Наконец, для решения задач полезными оказываются так называемые «замечательные пределы» функций:

1) *Первый* замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2) *Второй* замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$