ddhead

Производная функция

Поиск значений производных функций в точках (непосредственно по определению 1.4) в большинстве случаев является сложной задачей, требующей для своего решения значительных затрат вычислительных усилий. На практике оказывается удобнее применять иной подход, основанный на следующих соображениях.

Используемый в определении 1.4 предельный переход осуществляется по вспомогательной переменной t, в то время как, значение x_0 — аргумента функции $f(x)$, для которого ищется производная в точке, является *фиксированным числовым параметром.*

Если изменить x_0, то значение предела (1.4), вообще говоря, изменится. Однако для каждого конкретного x_0 оно *одно,* поскольку *если предел существует, то он единственен.*

Поэтому определение 1.4 можно рассматривать как правило, по которому значению x_0 ставится в соответствие единственное число $f'(x_0)$, и можно сказать, что таким образом задана некоторая *новая функция,* значение которой в точке x_0 равно $f'(x_0)$.

Эта функция называется *производной функцией от* $y = f(x)$ и обозначается как $f'(x)$, операцию поиска $f'(x)$ называют *дифференцированием.* В случае, когда для $f(x)$ существует $f'(x)$, говорят также, что функция $f(x)$ *дифференцируемая.*

Функцию $y = F(x)$ такую, что $F'(x) = f(x)$, называют *первообразной для* $y = f(x)$. Операция, *обратная* к дифференцированию, то есть, операция нахождения первообразной для $y = f(x)$ называется *интегрированием.*

Например, воспользовавшись решением задачи 1.5, можно утверждать, что функция, производная от $y = x^3$, есть $y = 3x^2$, поскольку использованный метод решения этой задачи годится для *любого* x_0.

Производные функции принято обозначать одним из следующих символов

$$y'_x\ ; \qquad \frac{dy}{dx}\ ; \qquad y'(x)\ .$$

В тех случаях, когда функция зависит более чем от одной переменной, идентификатор переменной, по которой берется производная, указывается явно в виде нижнего индекса.

Например, для функции $f(x,p)$ — зависящей от x и p, запись $f'_x(x,p)$ означает производную по переменной x, в предположении, что p — фиксированный параметр. Такие производные для функций, зависящих от многих переменных, принято называть *частными производными* и использовать для них специальное обозначение $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Стоит также отметить, что в русскоязычных математических текстах такие принципиально различные математические объекты, как:

«производная функции в точке», которая есть *число* и

«производная функция», являющаяся функцией,

часто именуются одним и тем же словом — “производная”, полагая, что из контекста понятно, о чем идет речь.

В английском языке, например, этой проблемы не существует, поскольку производная функции в точке — это *derivation*, а производная функция — *derivative*.

Очевидно, что использование производных функций для нахождения значений производной функции в точке гораздо удобнее, чем определение 1.4. Но тогда возникает вопрос: как находить производные функции?

Ответ на этот вопрос следующий:

надо воспользоваться информацией, содержащейся в следующих двух таблицах:

1) в таблице *производных функций*, содержащей формулы производных для некоторого небольшого набора элементарных функций, полученных непосредственно при помощи определения 1.4 и
2) в таблице *правил дифференцирования*, которые позволяют выражать производные от одних функций через производные от других. Обоснование справедливости этих правил, основанное на использовании определения 1.4 и свойств пределов функций, обычно приводится в полном курсе математического анализа.

Первая из этих таблиц, называемая обычно «Табличные производные» может иметь, например, такой вид

$f(x)$	$f'(x)$
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$a^x, \quad a>0, a\neq 1$	$a^x \ln a$
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a\lvert x\rvert, \quad a>0, a\neq 1$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Таблица 2.1

Вторую таблицу, называемую «Правила дифференцирования», удобно записать в следующем виде

1°	$(\ f(x)+g(x)\ )' = f'(x)+g'(x)$
2°	$(\ C\cdot f(x)\ )' = C\cdot f'(x)$, где C – const
3°	$(\ f(x)\cdot g(x)\ )' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
4°	$(\ f(\,g(x)\,)\ )'_x = f'_g(\,g(x)\,)\cdot g'_x(x)$

Таблица 2.2

В таблицах 2.1 и 2.2 по умолчанию предполагается, что все производные, использованные для записи этих формул, существуют.

Использование таблиц 2.1 и .2.2 проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 2.1. Пусть требуется найти производные функции для

$$1)\ y = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1}{x}, \qquad 2)\ y = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{и} \qquad 3)\ y = e^{\arccos x}.$$

Решение.

1) Сравнение правил 1° и 3° таблицы 2.2 показыает, что сумму функций дифференцировать проще, чем произведение, поэтому вначале выполним почленное деление, то есть будем искать производную от функции

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1}{x} \right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} \right)' =$$

и, используя первые формулы таблиц 2.1 и 2.2, получаем

$$= -\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} - x^{-2} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\,.$$

2) В таблице 2.2 нет формулы для дифференцирования дроби (хотя во многих учебниках ее можно встретить), поэтому сначала преобразуем данную функцию в произведение, и лишь потом применим правило 3° таблицы 2.2

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \big((\sin x)\cdot(x^{-1})\big)' = (\sin x)'\cdot(x^{-1}) + (\sin x)\cdot(x^{-1})' =$$

$$= (\cos x)\cdot x^{-1} + (\sin x)\cdot(-x^{-2}) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{ex\cos x - \sin x}{ex^2}\,.$$

3) Вначале вспомним, что $g(x) = \arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x\,,$ откуда, согласно первому правилу таблицы 2.2 и предпоследней строке таблицы 2.1,

$$g'_x(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Тогда,

$$y'_x = (e^{\arccos x})'_x = \left(e^{g(x)}\right)'_x = (e^g)'_g\cdot g'_x(x) =$$

$$= e^g\cdot g'_x(x) = e^g\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

В заключение данного раздела кратко рассмотрим еще два математических объекта, связанные с понятием производной функцией.

Во-первых, в процессе исследования свойств функции иногда оказывается необходимо рассмотреть характеристику, оценивающую скорость изменения величины *производной функции в окрестности точки* x_0.

Эта характеристика называется *производной второго порядка* или, просто, *второй производной.* Ее принято обозначать как

$$y''_{x=x_0} \qquad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0} ; \qquad y''(x)\big|_{x=x_0} ,$$

а поиск значения этой числовой характеристики сводится к вычислению предела вида

$$f''(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f'(x_0+t) - f'(x_0)}{t} . \tag{2.1}$$

Поскольку вторые производные функции в точке (как пределы функции) определены однозначно, то можно задать еще одну функцию, значениями которой являются числа, задаваемые формулой (2.1).

Для нахождения второй производной следует использовать те же правила, что и при вычислении первой.

Например, для функции $y = \ln|x|$, согласно таблице 2.1, $y' = \dfrac{1}{x}$, и, в свою очередь, вторая производная от функции $y = \ln|x|$ равна $y'' = (-1)x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$.

То есть, $(\ln|x|)'' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Другой математический объект, связанный с производной функцией, который часто используется в приложениях носит название *первого дифференциала* или, просто, *дифференциала.*

Дифференциалом функции $y = f(x)$, имеющей производную в точке x_0, называется функция df, зависящая от двух переменных x_0 и dx, вида

$$df(x_0, dx) = f'(x_0) \cdot dx.$$

Обратите внимание, что здесь как dx , так и df являются не произведениями, а обозначениями (символами) переменных величин.

По определению дифференциала его значение прямо пропорционально зависит от dx, в то время как его зависимость от x_0 может быть и нелинейной.

Основное свойство дифференциала описывает формула

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) = df(x_0, dx) + r(x_0, dx), \qquad (2.2)$$

в которой для остаточного члена $r(x_0, dx)$ справедливо равенство (являющееся утверждением теоремы!)

$$\lim_{dx \to 0} \frac{r(x_0, dx)}{df(x_0, dx)} = 0\,.$$

Это означает, что в качестве *оценки* разности $f(x_0 + dx) - f(x_0)$ для, дифференцируемой в точке x_0, функции $f(x)$ можно использовать величину $f'(x_0) \cdot dx$ и погрешность этой оценки будет тем меньше, чем меньше $|dx|$.

Определенный интеграл

В предыдущих разделах мы рассматривали локальные (то есть, относящихся к некоторой небольшой окрестности фиксированной точки) количественные характеристики функции. Однако на практике достаточно часто возникают задачи, требующие исследования свойств функций, на *не малых* промежуткам области определения.

Их примером является задача нахождения значения первообразной функции $F(x)$ в некоторой точке b по значению этой функции в точке a и по известной производной функции $f(x)$, в случае, когда a и b не находятся в малых окрестностях друг друга.

Рассмотрим возможный подход к решению этой задачи.

Пусть задана непрерывная функция $f(x)$, которая является производной функцией от некоторой $F(x)$, то есть справедливо равенство $F'(x) = f(x)$.

И пусть известно лишь ее значение $F(a)$, и требуется найти $F(b)$ — значение неизвестной нам первообразной в точке b.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на N равных частей точками $x_1, x_2, \dots x_{N-1}$. Кроме того, будем считать, что $x_0 = a$ и $x_N = b$. Тогда длина $k-$ой части разбиения будет равна

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{N}$$

для любого $k = 0, 1, 2, \dots N-1$.

Заметим, что числа $k = 1, 2, \dots N$ являются не только номерами точек разбиения, но также служат и *номерами отрезков*, на которые мы разбили $[a, b]$.

Обозначим приращение значения функции $F(x)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ как

$$\Delta F_k = F(x_k) - F(x_{k-1}) \, .$$

тогда, прибавляя и вычитая одинаковые числа, и после группировки соседних слагаемых, получаем

$$F(b) - F(a) = F(x_N) - F(x_0) =$$

$$= \underbrace{F(x_N) - F(x_{N-1})}_{\Delta F_N} + \underbrace{F(x_{N-1}) - F(x_{N-2})}_{\Delta F_{N-1}} + \dots$$

$$\dots + \underbrace{F(x_2) - F(x_1)}_{\Delta F_2} + \underbrace{F(x_1) - F(x_0)}_{\Delta F_1} = \sum_{k=1}^{N} \Delta F_k \, .$$

Откуда искомое значение $\quad F(b) = F(a) + \sum\limits_{k=1}^{N} \Delta F_k \, .$

Таким образом рассматриваемая задача свелась к нахождению $\sum\limits_{k=1}^{N} \Delta F_k$.

Поскольку по условию задачи $F'(x) = f(x)$, то, заменяя приращение функции ее *дифференциалом* по формуле (2.2)

$$\Delta F_k = F(x_k) - F(x_{k-1}) \approx dF(x_k) = F'(x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= F'(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k = f(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k,$$

получим приближенное равенство

$$F(b) \approx F(a) + \sum_{k=1}^{N} f(x_{k-1}) \Delta x_k \ .$$

Погрешность аппроксимации будет тем меньше, чем меньше длина отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, которая равна $\dfrac{b-a}{N}$ и уменьшается с ростом N. С другой стороны, при увеличении N растет число слагаемых в сумме

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \Delta x_k, \tag{2.3}$$

и предельный переход $N \to \infty$ приводит к необходимости раскрытия неопределенности вида “$0 \cdot \infty$”. Сумму (2.3) принято называть *интегральной.*

В курсе математического анализа показывается, что для существования предела $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N} f(x_{k-1})\Delta x_k$ достаточно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в каждой точке интервала (a,b).

Определение 2.1. Число, равное $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N} f(x_{k-1})\Delta x_k$, называется *определенным интегралом функции* $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\ .$$

Теперь решение задачи нахождения значения функции $F(x)$ в точке $x = b$ можно записать, при помощи определенного интеграла

$$F(b) = F(a) + \int\limits_a^b f(x)\,dx\ \ ,$$

хотя на практике чаще используется иной вид записи этой формулы:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{или же} \qquad \int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b\ . \qquad (2.4)$$

Первое из равенств (2.4) принято называть *формулой Ньютона-Лейбница.*

Она связывает значения функции $F(x)$ в двух, вообще говоря не близких друг к другу, точках через определенный интеграл от функции $f(x)$ в случае, когда $F'(x) = f(x)$, или позволяет находить значение определенного интеграла по значениям функции $F(x)$ в точках, являющимися пределами интегрирования.

Наконец, стоит запомнить, что функцию $f(x)$ обычно называют *подынтегральной функцией,* переменную x – *переменной интегрирования,* а интервал (a, b) – *интервалом интегрирования.*

Обратим также внимание на следующие нюансы. Во-первых, значение определенного интеграла не зависит от того, как обозначается переменная интегрирования. Например, вместо x можно использовать например t. Иначе говоря,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_a^b f(t)\,dt \qquad \text{– это одно и то же!}$$

Во-вторых, если для функции $f(x)$ удается подобрать функцию $F(x)$, то вместо предельного перехода в интегральной сумме (2.3) при нахождении определенного интеграла удобнее пользоваться формулой Ньютона-Лейбница.

В заключение отметим, что dx в обозначении интеграла следует рассматривать с одной стороны как множитель подынтегрального выражения, а с другой — как дифференциал независимой переменной интегрирования x.

Геометрический смысл определенного интеграла

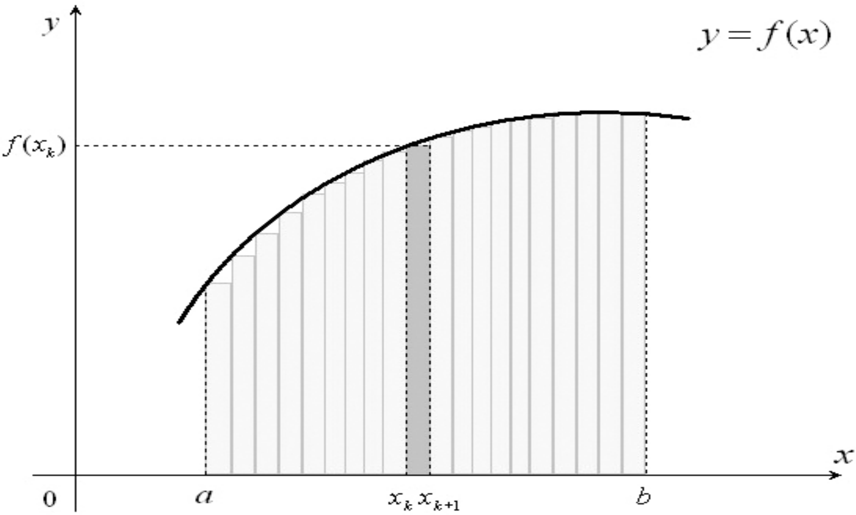

Рис. 1. Геометрический смысл определенного интеграла

Выясним теперь *геометрический смысл* определенного интеграла. На рис. 1 показаны график функции $y = f(x)$ и разбиение отрезка $[a, b]$ на N частей точками $x_1, x_2, \ldots x_{N-1}$.

Нетрудно заметить, что для показанного на рис. 1, примера интегральная сумма (2.3)

$$\sum_{k=1}^{N} f(x_{k-1})\Delta x_k,$$

равна площади «ступенчатой» фигуры, образованной из N прямоугольников, k–й из которых имеет длину основания $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и высоту $f(x_{k-1})$.

При предельном переходе $N \to \infty$ эта площадь стремится к S — площади фигуры, ограниченной снизу осью Ox, слева и справа — вертикальными прямыми, проходящими через точки $x = a$ и $x = b$, и ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$.

Поэтому в данном случае будет справедливо равенство

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx \quad .$$

Нужно отметить, что, поскольку площадь геометрической фигуры должна быть *неотрицательным* числом, использование приведенной геометрической интерпретации определенного интеграла для подсчета площадей следует производить *с учетом знака* подынтегральной функции $y = f(x)$.

Приведем теперь (без обоснования) основные свойства определенного интеграла.

1°. *Интегрирование суммы функций*:

$$\int\limits_a^b \Big(\, f(x) + g(x) \, \Big) \, dx = \int\limits_a^b f(x) \, dx + \int\limits_a^b g(x) \, dx \ \ .$$

2°. *Интегрирование произведения числа на функцию*:

$$\int\limits_a^b \Big(k \cdot f(x) \Big) \, dx = k \cdot \int\limits_a^b f(x) \, dx \ \ .$$

3°. *Аддитивность интегрирования, то есть интегрирование функции по объединению отрезков интегрирования*:

$$\int\limits_a^b f(x) \, dx + \int\limits_b^c f(x) \, dx \ \ = \ \ \int\limits_a^c f(x) \, dx \ \ .$$

4°. *По определению также считается, что справедливы равенства*:

$$\int\limits_a^b f(x) \, dx = - \int\limits_b^a f(x) \, dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_a^a f(x) \, dx = 0 \ .$$

Неопределенный интеграл

Связь первообразной и производной функций

Как уже было отмечено, в случае $f(x) = F'(x)$ функция $f(x)$ называется *производной функцией от функции* $F(x)$, а функция $F(x)$ — *первообразной функцией для функции* $f(x)$.

Соотношение $f(x) = F'(x)$ выражает производную через первообразную, и естественно возникает вопрос о том, как выразить первообразную через производную. Ответ дается следующей формулой

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \ , \tag{2.5}$$

где a – любое фиксированное число из области определения функции $f(x)$. Определенный интеграл в правой части равенства (2.5) называют *определенным интегралом с переменным верхним пределом.*

Убедимся, что из равенства (2.5) следует $F'(x) = f(x)$ для случая, когда функция $f(x)$ непрерывна.

Действительно, для любой фиксированной точки x_0 из области определения $f(x)$ справедливы соотношения

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{F(x_0+\Delta) - F(x_0)}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta} f(t)\,dt =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x_0)}{\Delta} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta} 1 \cdot dt = \lim_{\Delta\to 0} f(x_0) \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta = f(x_0)\ ,$$

в силу формулы Ньютона-Лейбница и по свойствам 2° и 3° для определенного интеграла. (На основании непрерывности подынтегральной функции здесь мы допустили, что на малом промежутке $[x_0, x_0+\Delta]$ функция $f(x)$ имеет постоянное значение $f(x_0)$.)

Таким образом, приходим к выводу, что каждая функция вида

$$F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$$

является первообразной для функции $f(x)$ и каждая первообразная для $f(x)$ представима в этом виде.

Попробуем теперь найти способ описания множества *всех* первообразных для непрерывной функции $f(x)$.

Как мы убедились, интеграл (2.5) является (при фиксированном a) функцией от переменной x, которая также будет и одной из первообразных для $f(x)$ функций. Если изменить значение нижнего предела интегрирования, положив вместо a некоторое $b \neq a$, то мы получим *другую* первообразную функцию.

Обозначим эту новую первообразную как $F_1(x)$ и найдем связь между $F_1(x)$ и $F(x)$. По свойствам определенного интеграла

$$F_1(x) = \int\limits_b^x f(t)\,dt = \int\limits_b^a f(t)\,dt \; + \; \int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) + C \ ,$$

где $C = \int\limits_b^a f(t)\,dt$ — некоторая константа. Следовательно, все первообразные *непрерывной* функции $f(x)$ могут отличаться друг от друга лишь на произвольную постоянную.

Для практических целей удобно ввести специальное обозначение для всех первообразных функции $f(x)$.

Определение 2.2. Совокупность *всех* первообразных функций для некоторой функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается как

$$\int f(x)\,dx\ .$$

Иными словами, в использованных нами обозначениях

$$\int f(x)\,dx \quad \equiv \quad \{\ F(x)+C \quad \forall C\ \}\ .$$

Правила интегрирования

Мы уже отмечали, что использование формулы Ньютона-Лейбница для подсчета значения определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

гораздо удобнее, чем определение 2.1. Правда, для этого необходимо знать неопределенный интеграл или, хотя бы $F(x)$ — какую-нибудь первообразную для функции $f(x)$.

Естественно возникает вопрос: всегда ли по формуле для $f(x)$ можно построить формулу для $F(x)$? И, если можно, то как это сделать?

Напомним, кстати, что по формуле $F(x)$ формула для $f(x)$ может быть построена всегда. Но в рассматриваемом случае — «увы и ах!» ответ на данный вопрос, вообще говоря, *отрицательный.* Самое лучшее, что здесь можно предложить, это запись вида

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt\ .$$

Примерами функций $f(x)$, первообразные для которых не выражаются через элементарные функции, служат $e^{x^2}, \quad \dfrac{\sin x}{x}, \quad \dfrac{1}{\ln x}$. Соответственно интегралы типа

$$\int e^{x^2}\,dx\ , \qquad \int \frac{\sin x}{x}\,dx\ , \qquad \int \frac{dx}{\ln x}$$

принято называть «неберущимися».

Вместе с тем, надо заметить, что, помимо очевидных соотношений типа

$$\int F'(x)\,dx = \Big\{\ F(x) + C \quad \forall C\ \Big\}\ ,$$

в ряде практически важных случаев все же удается найти формулу для $F(x)$ по известной формуле для $f(x)$. Общее число этих случаев изменяется тысячами и их описание составляет содержание весьма, солидных по размерам и числу страниц, справочников.

Для наших же целей вполне будет достаточно коллекции неопределенных интегралов, представленных в таблицах 2.3a и 2.3b. Эти интегралы в дальнейшем мы будем называть «табличными» и считать их известными.

Хотелось бы еще раз обратить внимание на существенность предположения о непрерывности функции $f(x)$.

Рассмотрим подробнее четвертую формулу (отмеченную «звездочкой») в таблице 2.3а. Можно убедиться, что приведенная формула для первообразной задает *не все* функции $F(x)$ такие, что $F'(x) = f(x)$. Например, для функции

$$F(x) = \left[\begin{array}{ll} \ln x + C_1 \ , & \text{если} \ \ x > 0 \ , \\ \ln(-x) + C_2 \ , & \text{если} \ \ x < 0 \end{array} \right.$$

производные как для случая $x > 0$, так и для $x < 0$ представляются одной и той же формулой $\frac{1}{x}$, даже, если $C_1 \neq C_2$.

Действительно,

$$\begin{array}{l} \dfrac{d\,(\ln x + C_1)}{dx} = \dfrac{1}{x} \ , \ \text{если} \ \ x > 0 \ , \\ \dfrac{d\,(\ln(-x) + C_2)}{dx} = \dfrac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x} \ , \ \text{если} \ \ x < 0 \ . \end{array}$$

Дело в том, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не является непрерывной: при $x_0 = 0$ она имеет разрыв, что и приводит к нарушению равенства (2.4.)

Впрочем, для практики эти проблемы не являются существенным ограничением. Скажем, функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$ можно рассматривать для случаев $x > 0$ и $x < 0$ независимо друг от друга. Тогда формула (2.4) будет выполняться, поскольку эта функция непрерывна как для всех $x > 0$, так и для любых отрицательных значений своего аргумента.

	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
1°	$x^a, a \neq -1$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$
2°	e^x	$e^x + C$
3°	$a^x, \quad a > 0, a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
4°	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C^*$
5°	$\cos x$	$\sin x + C$
6°	$\sin x$	$-\cos x + C$

Таблица 2.3а

	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
7°	$\dfrac{1}{e\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
8°	$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$, если $a \neq 0$
9°	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + C$, если $a > 0$
10°	$\sqrt{a^2-x^2}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}+C$, если $a > 0$
11°	$\sqrt{x^2-a^2}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C$

Таблица 2.3b

Столь небольшое число «табличных» интегралов оказывается достаточным для решения значительного числа задач, поскольку в нашем распоряжении имеются также и формулы, позволяющие *выражать неопределенные интегралы одних функций через интегралы от других*. Эти формулы сведены в таблицу 2.4.

1°	$\int (\ f(x) + g(x)\ )\ dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
2°	$\int (\ k \cdot f(x)\ )\ dx = k \cdot \int f(x)\,dx$, где k – const
3°	$\int f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,dx$
4°	$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$, где $u = g(x)$

Таблица 2.4

Данные формулы нуждаются в доказательстве, и для примера убедимся в справедливости формулы 3°, часто называемой правилом *интегрирования по частям.* Согласно пункту 3° таблицы 2.2 и определению интеграла

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \int (f(x)\cdot g(x))'\; dx = \int (f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x))\; dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx\;,$$

поскольку из равенства функций следует равенство их неопределенных интегралов (но не первообразных!) Из последнего соотношения и следует формула интегрирования по частям.

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx\;.$$

Правило 4°, часто называемое *правилом замены переменной интегрирования,* также вполне очевидно, ибо по определению первого дифференциала из равенства $u = g(x)$ следует $du = g'(x)\,dx$. Заметим, что достаточно часто (особенно, если функция $g(x)$ не слишком сложна) правило 4° записывают в виде

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(g(x))\,d(g(x))\;.$$

Примеры нахождения интегралов

Рассмотрим примеры подсчета значений определенных интегралов, основанных на следующей схеме:

А) подынтегральную функцию данного определенного интеграла приводим к виду, удобному для использования таблиц 2.3 и 2.4;

В) при помощи таблиц 2.3 и 2.4 находим неопределенный интеграл (или какую-нибудь первообразную);

С) применяем формулу Ньютона-Лейбница.

Вначале продемонстрируем как при помощи таблицы 2.3, зная неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$, можно получить формулу для $\int f(ax+b)\,dx$.

Пример 2.2. Пусть требуется найти

$$\int \cos(2x-7)\,dx\ .$$

Решение. Заметим, что в таблице 2.3а (формула 5°) имеется табличный интеграл

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C\ .$$

Введем новую переменную $u = 2x - 7$, для которой имеем

$$du = d(2x-7) = d(2x)+d(-7) = 2\,dx+0 = 2\,dx \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{du}{2}\,.$$

Тогда искомый интеграл при помощи таблицы 2.4 (формула 2°) находится следующим образом

$$\int \cos(2x-7)\,dx \ = \int \cos u\,\frac{du}{2} \ = \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin(2x-7)+C.$$

Заметьте, что в ответе вместо $\dfrac{C}{2}$ написано C — это не опечатка. Произвольная константа, деленная пополам, все равно остается произвольной константой.

Проверьте самостоятельно, что аналогичным методом можно, например, получить формулы

$$\int e^{3x+1}\,dx \;=\frac{1}{3}e^{3x+1}+C \qquad \text{и} \qquad \int \frac{dx}{5x+2}=\frac{1}{5}\ln|5x+2|+C\;.$$

Далее заметим, что, несмотря на невозможность в общем случае записи интеграла в виде некоторой элементарной функции, имеют место случаи, когда это принципиально *всегда выполнимо.* К таким интегралам, в первую очередь, относятся интегралы от *дробно-рациональных* функций, то есть функций, представимых в виде дроби, числитель и знаменатель которых есть алгебраические многочлены, например,

$$\int \frac{x^2+4x+3}{x^3-3x^2+8x-6}\,d\,x\;.$$

Рассмотрим два основных метода интегрирования дробно-рациональных функций, в первом из которых удается разложить знаменатель на линейные множители.

Пример 2.3. Пусть требуется найти

$$\int \frac{(x-4)\,dx}{x^2-5x+6}\ .$$

Решение. Поскольку $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3),$, то попробуем представить подынтегральную функцию в виде

$$\frac{x-4}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}\ ,$$

где A и B – некоторые числа, значения которых найдем из следующей цепочки равенств.

$$\frac{x-4}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} =$$

$$= \frac{A(x-3) - B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x - (3A+2B)}{x^2-5x+6}\ .$$

Сравнивая начальное и конечное звенья этой цепочки, легко видеть, что значения чисел A и B (при которых данные равенства верны при всех x) являются решением системы линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} A & + & B & = & 1 \\ 3A & + & 2B & = & 4 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcr} A & = & 2 \\ B & = & -1 \end{array}\right. .$$

Теперь, используя таблицы 2.3 и 2.4, получаем

$$\int \frac{(x-4)\,dx}{x^2-5x+6} = \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-3} \right) dx =$$

$$= 2\int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x-3} = 2\ln|x-2| - \ln|x-3| + C = \ln\frac{(x-2)^2}{|x-3|} + C \; .$$

Заметим, что этот алгоритм иногда называют «методом разложения на простейшие множители».

Следующие два примера показывают как можно действовать в случае, когда знаменатель дробно-рациональной функции не удается разложить на линейные множители.

Пример 2.4. Найти определенный интеграл

$$\int\limits_{2}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+4}\,.$$

Решение. По формуле 2° (из таблицы 2.4) выполним следующие преобразования соответствующего неопределенного интеграла

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\dfrac{dx}{2}}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} =$$

Теперь используем определение дифференциала и правило 4° из таблицы 2.4, считая $u = \dfrac{x}{2}$.

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C\,.$$

Заключительное равенство следует из формулы 8° таблицы 2.4.
Наконец, по формуле Ньютона-Лейбница находим определенный интеграл.

$$\int\limits_{2}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Bigg|_{2}^{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{24}\,.$$

Пример 2.5. Найти

$$\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx\ .$$

Решение. Поскольку

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} = 1 + \frac{x}{x^2+1}\ ,$$

то применяя последовательно формулы 1° и 4° таблицы 2.4, получим

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 + \frac{x}{x^2+1}\right)\,dx = x + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= x + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2+1} = x + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = x + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C\ .$$

Здесь, при использовании 4° мы полагали $u = x^2+1$, откуда следуют равенства для дифференциалов: $d(x^2+1) = d(x^2) = 2x\,dx$.

Теперь найдем значение определенного интеграла. По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx = \left(x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= \left(3 + \frac{1}{2}\ln 10\right) - \left(2 + \frac{1}{2}\ln 5\right) = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{10}{5} = 1 + \ln\sqrt{2}\ .$$

Иногда в процессе интегрирования оказывается эффективным одновременное использование различных свойств неопределенного интеграла, приводимых в таблице 2.4.

Пример 2.6. Найти

$$\int\limits_1^4 (\sqrt{x}+1)^3\,dx\ .$$

Решение. По формулам 1° и 2° в таблице 6.2.2, выражающим неопределенный интеграл от суммы функций через интегралы от слагаемых, и используя формулу «куб суммы двух чисел», получаем

$$\int (\sqrt{x}+1)^3\,dx \ = \int \Big((\sqrt{x})^3 + 3(\sqrt{x})^2 + 3\sqrt{x} + 1 \Big)\,dx \ =$$

$$= \int (\sqrt{x})^3\,dx \ + \ 3\int (\sqrt{x})^2\,dx \ + \ 3\int \sqrt{x}\,dx \ + \ \int 1\cdot\,dx \ =$$

Теперь используем первую формулу таблицы 2.3 и правила действий со степенями с дробным показателем.

$$= \int x^{3/2}\ dx + 3\int x\ dx + 3\int x^{1/2}\ dx + \int 1\cdot\,dx \ = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{3}{2}x^2 + 2x^{3/2} + x + C\ .$$

Наконец, по формуле Ньютона-Лейбница найдем требуемое значение определенного интеграла.

$$\int\limits_1^4 (\sqrt{x}+1)^3\,dx \ = \left(\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{3}{2}x^2 + 2x^{3/2} + x \right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= \left(\frac{2}{5}\cdot 4^{5/2} + \frac{3}{2}\cdot 4^2 + 2\cdot 4^{3/2} + 4 \right) - \left(\frac{2}{5}\cdot 1^{5/2} + \frac{3}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1^{3/2} + 1 \right) = \frac{519}{10}\ .$$

Пример 2.7. Найти

$$\int\limits_0^{\pi} x \cdot \cos x \, dx \ .$$

Решение. Для нахождения неопределенного интеграла применим правило интегрирования по частям, то есть формулу 3° из таблицы 2.4. Будем полагать, что $f(x) = \sin x$, а $g(x) = x$. Тогда соответствующий неопределенный интеграл можно преобразовать следующим образом.

$$\int x \cdot \cos x \, dx \ = \int x \cdot (\sin x)' \, dx \ = x \cdot \sin x - \int (x)' \cdot \sin x \, dx \ =$$

Поскольку $(x)' = 1$, по шестой формуле таблицы 2.3 получаем

$$= x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx \ = x \cdot \sin x - (-\cos x) = x \cdot \sin x + \cos x + C \ .$$

По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int\limits_0^{\pi} x \cdot \cos x \, dx \ = (x \cdot \sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= (\pi \cdot \sin \pi + \cos \pi) - (0 \cdot \sin 0 + \cos 0) = (-1) - (1) = -2 \ .$$

Пример 2.8. Найти

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx \ .$$

Решение. Применим формулу 3° *интегрирования по частям,* используя равенство $(x)' = 1$,

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx \ = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx \ = x \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \ =$$

затем – формулу 4° таблицы 2.4, что с учетом $u = x^2$ дает

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{1+x^2} dx \ = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \ .$$

Наконец, по формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx \ = \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(1 \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} \ln(1+1^2) \right) - \left(0 \operatorname{arctg} 0 - \frac{1}{2} \ln(1+0^2) \right) = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \ .$$

В завершение обзора приведем пример, в котором оказывается целесообразным *двукратное* использование правила интегрирования по частям.

Пример 2.9. Найти

$$\int\limits_0^{\pi} e^x \sin x \, dx \ .$$

Решение. Применив *интегрирования по частям,* получим

$$\int e^x \sin x \, dx \ = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x) \, dx \ ,$$

то есть выражение содержащее интеграл, который ничуть не проще исходного. Однако повторное интегрирование по частям дает соотношение

$$\int e^x \sin x \, dx \ = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \ ,$$

из которого следует

$$2 \cdot \int e^x \sin x \, dx \ = -e^x \cos x + e^x \sin x + C \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int e^x \sin x \, dx \ = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C \ .$$

По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_0^{\pi} e^x \sin x \, dx \ = \left(\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \right) \Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{\pi} (\sin \pi - \cos \pi) \right) - \left(\frac{1}{2} e^0 (\sin 0 - \cos 0) \right) = \frac{e^{\pi} + 1}{2} \ .$$

В заключение обзора методов интегрирования следует отметить, во-первых, что достаточно часто пункты A), B) и C) объединяют, чтобы получить более компактную форму записи. Это можно делать, однако, соблюдая определенные правила. Например, полагая $u = \sin x$, будем иметь

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x \, dx \ = \int\limits_0^1 e^u \, du \ = e^u \Big|_0^1 = e - 1 \ .$$

Обратите внимание, что при замене переменной (x на u) *пределы интегрирования также меняются*: вместо $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ нужно брать $[0, 1]$, поскольку при замене $u = \sin x$ имеет место $\sin 0 = 0$ и $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$.

Во-вторых, подсчет значений определенных интегралов иногда можно упростить, использовав равенства

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x) \, dx \ = \ 2 \cdot \int\limits_0^a f(x) \, dx \ ,$$

если функция $f(x)$ – четная, и

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x) \, dx \ = \ 0,$$

в случае нечетной $f(x)$. Проверьте справедливость этих равенств самостоятельно.