Операции с обобщенными функциями

Теперь мы рассмотрим случаи, в которых использование записи вида (f,φ) не только корректно, но и достаточно эффективно.

Суть приема такова: мы получаем символическую форму записи с функционалом некоторого "нового типа" для *регулярного* случая (когда использование интеграла допустимо), а потом (предварительно убедившись в линейности и непрерывности "новичка") используем эту форму записи и для *сингулярного* случая, принимая ее по определению.

Умножение обычной функции на обобщенную

Используем эту схему для определения в D' операции "умножения на функцию".

Пусть $g(x)$ − бесконечно дифференцируемая обычная функция. Что мы можем принять за $g(x)f(x)$, если $f(x)\in D'$?

В регулярном случае мы имеем $(g(x)f,\,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\varphi(x)\,dx=(f,\,g(x)\varphi)$. По этому за функционал $g(x)f$ можно принять $(g(x)f,\,\varphi)=(f,\,g(x)\varphi)$.

Линейность и непрерывность нового функционала в этом определении проверьте самостоятельно.

Дифференцирование обобщенных функций

По этой же технологии можно определить и производную для обобщенной функции. Данное определение имеет вид

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') \ . \qquad (1)$$

Действительно, для регулярной обобщенной функции $f(x)$, которая порождается обычной непрерывно дифференцируемой функцией, согласно правилу интегрирования по частям, имеем

$$f' = (f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -(f, \varphi') \ ,$$

что и дает основание принять формулу (1) за определение производной от обобщенной функции.

Из формулы (1) следует, что

- *каждая* обобщенная функция имеет производную *любого* порядка,
- операция дифференцирования обобщенной функции *линейна*:

$$((\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)', \varphi) = \lambda_1 (f_1', \varphi) + \lambda_2 (f_2', \varphi).$$

Для обобщенных функций имеется аналог формулы Лейбница. Рассмотрим для примера случай $n=1$.

Пусть $f(x)$ − произвольная обобщенная функция, а $g(x)$ − регулярная обобщенная функция, порождаемая бесконечно дифференцируемой обычной функцией. Тогда

$$(f\cdot g)'=((f\cdot g)',\varphi)=-((f\cdot g),\varphi')=-(f,g\varphi')=$$

$$=-(f,(g\cdot\varphi)'-g'\varphi)=(f,g'\varphi)-(f,(g\cdot\varphi)')=$$

$$=(fg',\varphi)+(f',g\varphi)=(fg',\varphi)+(f'g,\varphi)=$$

$$=(f'g,\varphi)+(fg',\varphi)=(f'g+fg',\varphi)=f'g+fg'\,.$$

Пример 1. Найти f' и f'' для обобщенной функции, порождаемой обычной функцией

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x \text{ при } x\le 0,\\ \beta x \text{ при } x>0.\end{cases}.$$

Решение: 1. Имеем

$$f' = -(f,\varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\alpha\int\limits_{-\infty}^{0} x\,\varphi'(x)\,dx - \beta\int\limits_{0}^{+\infty} x\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\alpha\left(x\cdot\varphi(x)\,\Bigg|_{-\infty}^{0} - \int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx\right) - \beta\left(x\cdot\varphi(x)\,\Bigg|_{0}^{+\infty} - \int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(x)\,dx\right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\varphi}\big(\alpha + (\beta-\alpha)\theta(x)\big)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx\,,$$

где *функция Хевисайда* $\theta(x)=\begin{cases}0 \ \text{ при } x<0,\\ \dfrac{1}{2} \text{ при } x=0,\\ 1 \ \text{ при } x>0.\end{cases}$,

в итоге, $f'(x)=\begin{cases}\alpha & \text{при } x<0,\\ \dfrac{\alpha+\beta}{2} & \text{при } x=0,\\ \beta & \text{при } x>0.\end{cases}$ Или $f'(x)=\alpha+(\beta-\alpha)\theta(x)$.

2. Для второй производной аналогичными рассуждениями получапем

$$f''= -(f',\varphi') = (f,\varphi'') = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi'(x)\,dx = -\alpha\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi'(x)\,dx - \beta\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\alpha\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \beta\varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty} = \left(\beta-\alpha\right)\varphi(0) = \left(\beta-\alpha\right)\delta(x).$$

3. Если учесть, что при $\alpha = -1$ и $\beta = 1$ мы имеем $f(x) = |\,x\,|$, то в пространстве D' будут верны равенства $|\,x\,|' = \operatorname{sgn} x$ и $|\,x\,|'' = 2\delta(x)$.

Задача 1 иллюстрирует следующие правила дифференцирования регулярных обобщенных функций с разрывами 1-го рода, как у самих функций, так и у их производных.

Предположим, что порождающая функция непрерывна, но у ее производной есть разрыв первого рода в точке x_0 со "скачком" значения, равным *A*. Тогда производная обобщенной функции будет равна производной порождающей функции с добавкой вида $A\theta(x-x_0)$.

Если же скачок первого рода в точке x_0 величины *A* имеется у порождающей функции, то у ее обобщенной производной имеется слагаемое $A\delta(x-x_0)$.

Пример 2. Найти в D' вторую производную для регулярной функции $f(x) = |x|\sin x$.

Решение: По формуле Лейбница имеем

$$f'' = (|x|\sin x)'' = |x|''\sin x + 2|x|'(\sin x)' + |x|(\sin x)''.$$

Поскольку $|x|' = \operatorname{sgn} x$ и $|x|'' = 2\delta(x)$, то получаем

$$f'' = 2\delta(x)\sin x + 2\operatorname{sgn} x \cdot \cos x - |x|\sin x \ .$$

Эту формулу можно упростить, поскольку в D' $\delta(x)\sin x = 0$. Действительно, $\big(\delta(x)\sin x, \varphi(x)\big) = \big(\delta(x), \varphi(x)\sin x\big) = \varphi(0)\sin 0 = 0.$ Поэтому окончательно

$$f'' = 2\operatorname{sgn} x \cdot \cos x - |x|\sin x \ .$$