

## Преобразование Фурье

Интеграл Фурье имеет многочисленные приложения в задачах механики и физики. При этом также часто оказывается востребованным тесно с ним связанный, комплексно-значный математический объект, называемый *преобразованием Фурье*.

Разберемся вначале, что это такое. Из (4) имеем,  $Y(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt$ .

Тогда, приняв во внимание, что выражение  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt$  есть четная функция по переменной  $\omega$ , а выражение  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega(x-t) dt$  нечетная, получим

$$Y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt \quad \text{и} \quad 0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega(x-t) dt.$$

Умножим теперь обе части второго равенства на мнимую единицу и затем сложим их почленно.

$$\begin{aligned} Y(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega(x-t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos \omega(x-t) + i \sin \omega(x-t)) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали формулу Эйлера.

Если функция  $f(x)$  непрерывна, то  $Y(x) = f(x)$  и последнее равенство можно записать в симметричной форме  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ . (5)

Здесь придется сделать "лирическое отступление" и вспомнить, что внешний интеграл в формуле (5) (то есть, интеграл по переменной  $\omega$ ) есть не просто несобственный интеграл с двумя особыми точками  $+\infty$  и  $-\infty$ . Предельный переход в обеих точках мы делали "синхронно", что запрещено по определению в обычном несобственном интеграле. Иначе говоря, тут мы имеем дело с каким-то особым видом несобственных интегралов.

Это различие поясняет

Пример 1. Найти  $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ .

Этот интеграл несобственный, имеющий две особые точки: "+0" и "-0". Для его сходимости необходимо, чтобы он сходиллся в каждой из них. Возьмем, например, "+0". Имеем

$$I_{+0} = \int_{\rightarrow+0}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \varepsilon = +\infty$$

Интеграл  $I_{+0}$  расходится, значит, расходится и интеграл  $I$ . Заметим, что также расходится и интеграл  $I_{-0}$ .

Теперь выполним предельный переход в точках "+0" и "-0" "синхронно", используя ту же схему, что и при выводе формулы (4):

$$I_{?} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \ln |x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln |x| \Big|_{\varepsilon}^1 \right) = 0.$$

Откуда следует, что интеграл сходится.

Чтобы выделить несобственные интегралы такого рода, Коши предложил называть их интегралами *в смысле главного значения* и обозначать символом "v.p." (от фр. *valeur principale*). Так что, . v.p.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$  .

Понятно, что из сходимости несобственного интеграла в обычном смысле следует его сходимость в смысле главного значения, но не наоборот.

Для решения практических задач оказалось удобным, исходя из формулы (5), дать

Определение 1. Функция

$$\hat{f}(\omega) = \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

называется *преобразованием Фурье* функции  $f(x)$ , а функция

$$\check{f}(\omega) = \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

– *обратным преобразованием Фурье*.

Часто также используются обозначения

$$\hat{f}(\omega) = F[f] \text{ и } \check{f}(\omega) = F^{-1}[f].$$

Пример 2. Найти *обратное* преобразование Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| \leq u, \\ 0, & \text{при } |x| > u. \end{cases}$$

Решение: Для  $\tilde{f}(\omega)$  имеем

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^u e^{i\omega x} dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\omega u} - e^{-i\omega u}}{2i\omega} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin u\omega}{\omega}$$

Пример 3. Найти преобразование Фурье для функции  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

Для  $\hat{f}(\omega)$  имеем

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= F\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\omega x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2} dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega x)}{1+x^2} dx =\end{aligned}$$

в силу четности косинуса и нечетности синуса, а также используя значение интеграла Лапласа, получаем

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi}{2} e^{-|\omega|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|}.$$

## Свойства преобразования Фурье

Сформулируем (без доказательства) основные свойства преобразования Фурье.

1°. Пусть функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на  $\mathbf{R}$ , тогда  $\hat{f}(\omega)$  непрерывная и ограниченная на  $\mathbf{R}$  функция у которой  $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$ .

2°. Пусть функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема и имеет конечные односторонние производные на  $\mathbf{R}$ , тогда  $F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f$ .

3°. Линейность преобразования Фурье: если преобразования Фурье от функций  $f$  и  $g$  существуют, то для любых комплексных  $\lambda$  и  $\mu$  верно равенство

$$F[\lambda f + \mu g] = \lambda F[f] + \mu F[g].$$

4°. Преобразование Фурье от производной функции: если производные функции  $f^{(k)}(x)$   $k = 0, 1, 2, \dots, n$  непрерывно дифференцируемы и абсолютно интегрируемы, то

$$\forall k = [1, n] \quad F[f^{(k)}] = (i\omega)^k F[f].$$

При этом  $\exists C > 0$  такое, что  $|F[f]| \leq \frac{C}{|\omega^n|}$ .

Другими словами, чем больше абсолютно интегрируемых производных имеет функция, тем быстрее стремиться к нулю на бесконечности ее преобразование Фурье.

5°. Производная преобразования Фурье: пусть функция  $f(x)$  непрерывна, а функции вида  $x^k f(x)$   $\forall k = 0, 1, 2, \dots, n$  абсолютно интегрируемы на  $\mathbf{R}$ , тогда ее преобразование Фурье  $\hat{f}(\omega)$  есть  $n$  раз дифференцируемая на  $\mathbf{R}$  функция. При этом

$$\hat{f}^{(k)}(\omega) = (-i)^k F[x^k f(x)] \quad k = [1, n].$$

Использование свойств преобразования Фурье проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 4. Пусть  $f(x) = \frac{1}{1+|x^5|}$ . Показать, что

- 1)  $\hat{f}(\omega)$  имеет на  $\mathbf{R}$  непрерывную производную третьего порядка;
- 2).  $\hat{f}(\omega) = O\left(\frac{1}{\omega^5}\right)$  при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Решение:

- 1) Достаточные условия интегрируемости (признак сравнения) функции  $f(x) = \frac{x^k}{1+|x^5|}$  суть  $k = 1, 2, 3$ . Значит, по свойству 5<sup>o</sup>  $\hat{f}(\omega) = F[f]$  имеет производные до третьего порядка включительно.
- 2) Функция  $\frac{1}{1+|x^5|}$  имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно и кусочно-непрерывную пятую производную вида  $120 \operatorname{sign}(x)$ . Тогда из свойства 4<sup>o</sup> получаем требуемую оценку.



Пример 5. На множестве  $x \in \mathbf{R}, t \geq 0$  найти функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  – теплопроводности такую, что  $u(x, 0) = u_0(x)$ .

Решение: введем следующие обозначения:  $\frac{\partial u}{\partial t} = u'_t$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx}$ . Кроме того, будем предполагать, что функции  $u(x, t), u'_x(x, t), u''_{xx}(x, t)$  абсолютно интегрируемы по  $x$  на всей вещественной оси при каждом  $t \geq 0$ . Наконец, также условимся, что  $\exists \varphi(x): \forall t \geq 0 \left| u'_t(x, t) \right| \leq \varphi(x)$  и  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx < +\infty$ . (6)

Основная идея: к обеим частям уравнения  $u'_t = u''_{xx}$  применим преобразование Фурье по  $x$ , считая  $t$  параметром.

Пусть

$$F[u(\omega, t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx.$$

Для большей наглядности мы не будем применять свойство 4<sup>о</sup>, а используем непосредственно определение преобразования Фурье.

Тогда, проинтегрировав два раза по частям и учтя, что проинтегрированные слагаемые в силу (6) зануляются, получим равенства

$$\begin{aligned} F[u''_{xx}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u''_{zz} e^{-i\omega z} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( u'_z e^{-i\omega z} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} u'_z e^{-i\omega z} dz \right) = \\ &= \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \left( u e^{-i\omega z} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\omega z} dz \right) = -\omega^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\omega z} dz = -\omega^2 F[u] \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу сделанных предположений, и, поскольку в преобразованном по Фурье уравнению,  $\omega$  – параметр,  $F[u_t'] = F\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{dF}{dt}$ . И таким образом, исходное уравнение в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (где неизвестным является функция  $F$ ) вида:

$$\frac{dF}{dt} = -\omega^2 F,$$

общее решение которого есть семейство функций  $\hat{f}(\omega, t) = D(\omega)e^{-\omega^2 t}$ .

Начальным условием при  $t = 0$  в нашей задаче является функция  $u_0(x)$ , преобразование которой по Фурье – функция  $D(\omega)$ . Это означает, что  $D(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(z)e^{-i\omega z} dz$ .

В итоге получаем, что искомое решение уравнения теплопроводности находится путем применения к функции  $\hat{f}(\omega, t)$  обратного преобразования Фурье.

Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} D(\omega)e^{i\omega x - \omega^2 t} d\omega, \quad \text{где } D(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(z)e^{-i\omega z} dz.$$

Например (проверьте самостоятельно, используя решение задачи §17, №8(2)), что,

если  $u_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ , то  $\hat{f}(\omega, t) = e^{-\omega^2\left(t + \frac{1}{2}\right)}$ . Откуда получается, что

$$u(x, t) = F^{-1}\left[e^{-\omega^2\left(t + \frac{1}{2}\right)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+2}}.$$