

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА. УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ

Рассмотрим *несобственный* интеграл от функции двух переменных $f(x, \alpha)$

$$\Phi(\alpha) = \int_a^{\mapsto b} f(x, \alpha) dx, \quad (1)$$

определенной по x на промежутке $a \leq x < b$ и при $\alpha \in \Omega$. Значение этого интеграла, вообще говоря, зависит от значения α , при котором он берется. Здесь символ b может означать как вещественное число, так и $+\infty$.

Несобственный интеграл по своему определению есть *предел* от римановского (определенного) интеграла, когда, например, верхний предел последнего стремится к b . Напомним, что в римановском интеграле подынтегральная функция, равно как и промежуток интегрирования, должны быть *ограниченными*. В несобственном интеграле этого не требуется.

В этом случае зависимость значения (1) от величины α является *функциональной*, поскольку предел, если существует, должен быть единственным. То есть, интеграл в формуле (1) есть *функция* от переменной α .

Возникает естественный вопрос: как свойства функции $\Phi(\alpha)$ зависят от свойств функции $f(x, \alpha)$?

Или, иначе говоря, можно ли, выполняя какую-либо операцию с функцией $\Phi(\alpha)$ (скажем, вычисления предела, дифференцирования или интегрирования по α) "переставлять" эту операцию и интегрирование в (1) ?

В общем случае этого делать *нельзя*, но представляется целесообразным выяснить, при каких условиях такое возможно.

Чтобы разобраться с этой проблемой, дадим предварительно два определения:

А) Интеграл (1) называется *поточечно* сходящимся на множестве Ω , если

$$\forall \alpha \in \Omega \text{ и } \forall \varepsilon > 0: \exists \delta_{\varepsilon, \alpha} > 0: \forall \delta: b - \delta_{\varepsilon, \alpha} < \delta < b \mapsto \left| \int_{b - \delta_{\varepsilon, \alpha}}^{\mapsto b} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon.$$

В) Интеграл (1) называется *равномерно* сходящимся на множестве Ω , если

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta_{\varepsilon} > 0: \forall \alpha \in \Omega \text{ и } \forall \delta: b - \delta_{\varepsilon} < \delta < b \mapsto \left| \int_{b - \delta_{\varepsilon}}^{\mapsto b} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon.$$

Заметим, что, хотя определения А) и В) по тексту похожи, между ними имеется существенная разница.

Первое определение просто означает существование несобственного интеграла для каждого фиксированного $\alpha \in \Omega$.

Согласно этому определению в случае поточечной сходимости имеется правило выбора $\delta_{\varepsilon, \alpha}$ (по заранее заданным значениям ε и α), которое обеспечивает выполнение, указанного в определении, условия. При этом данное правило может быть *разным* для разных значений $\alpha \in \Omega$.

Во втором определении требуется существование правила выбора δ_ε , обеспечивающего выполнение, указанного в определении, условия, разом для *всех* значений α из Ω .

Понятно, что второе определение более "жесткое", чем первое. То есть, из *равномерной* сходимости интеграла (1) следует *поточечная*, но не наоборот.

Имеют место следующие утверждения (теоремы).

Теорема 1. Если

- 1) $f(x, \alpha)$ непрерывна на множестве $K : \{ a \leq x < b, \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] \}$ и
- 2) интеграл (1) сходится равномерно на $[\alpha_1, \alpha_2]$,

то $\Phi(\alpha)$ непрерывна на $[\alpha_1, \alpha_2]$ и справедлива формула

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b dx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha.$$

Теорема 2. Если

- 1) функции $f(x, \alpha)$ и $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ непрерывны на множестве $K : \{ a \leq x < b, \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] \}$ и

- 2) интеграл (1) сходится поточечно на $[\alpha_1, \alpha_2]$, а интеграл $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx$ сходится равномерно на $[\alpha_1, \alpha_2]$,

то справедлива формула $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx.$

Из этих теорем следует важность свойства равномерной сходимости в задачах исследования несобственных интегралов, зависящих от параметра. При этом непосредственное использование определения В) может оказаться весьма трудоемким.

Для решения практических задач в ряде случаев оказываются полезными следующие утверждения:

I. *Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости.*

Интеграл (1) сходится равномерно тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{A \rightarrow b} \int_A^{\mapsto b} f(x, \alpha) dx = 0.$$

II. *Отрицание равномерной сходимости.*

Интеграл (1) не сходится равномерно, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ и } \alpha_0 \in \Omega : \forall \delta > 0 \quad \exists \xi_0 : b - \delta < \xi_0 < b \quad \mapsto \left| \int_{\xi_0}^{\mapsto b} f(x, \alpha_0) dx \right| \geq \varepsilon_0.$$

III. *Признак Вейерштрасса (достаточное условие равномерной сходимости).*

Если существует A такое, что функция $\phi(x)$ определенная на $[A, +\infty)$ такова, что:

1) $\forall x \in [A, +\infty)$ и $\forall \alpha \in \Omega: |f(x, \alpha)| \leq \phi(x),$

2) несобственный интеграл $\int_A^{\mapsto b} \phi(x) dx$ сходится,

то интеграл (1) сходится равномерно на Ω .

IV. *Критерий Коши (необходимое и достаточное условие равномерной сходимости).*

Интеграл (1) сходится равномерно, тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon \in (a, b) : \forall \alpha \in \Omega \quad \forall \delta' \in [\delta_\varepsilon, b) \text{ и } \forall \delta'' \in [\delta_\varepsilon, b) \mapsto \left| \int_{\delta'}^{\delta''} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon .$$

V. *Отрицание критерия Коши.* Если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta \in (a, b) : \exists \alpha_0 \in \Omega, \quad \exists \delta'_0 \in [\delta, b) \text{ и } \exists \delta''_0 \in [\delta, b) \mapsto \left| \int_{\delta'_0}^{\delta''_0} f(x, \alpha_0) dx \right| \geq \varepsilon_0 ,$$

то несобственный интеграл не сходится равномерно.

VI. *Признак Дирихле (достаточное условие равномерной сходимости).*

Интеграл вида $\int_A^{x \rightarrow b} f(x, \alpha)g(x, \alpha) dx$ сходится равномерно по α на множестве Ω , если на множестве $x \in [A, b)$ при каждом $\alpha \in \Omega$ функции $f(x, \alpha)$, $g(x, \alpha)$ и $g'_x(x, \alpha)$ непрерывны по x и удовлетворяют условиям:

- 1) $\lim_{x \rightarrow b} g(x, \alpha) = 0$ равномерно по $\alpha \in \Omega$,
- 2) функция $g'_x(x, \alpha)$ знакопостоянна на $x \in [A, b)$ при каждом $\alpha \in \Omega$,
- 3) $\exists M > 0 \forall \alpha \in \Omega$ и $\forall x \in [a, b) \mapsto \left| \int_a^x f(u, \alpha) du \right| \leq M$.

Основываясь на этих теоретических утверждениях, выполняют исследования несобственных интегралов на сходимость

Пример 1. Исследовать на равномерную сходимость $\Phi(\alpha) = \int_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$ при $A > 0$ на множествах: 1) $\alpha \in [\alpha_0, +\infty)$, где $\alpha_0 > 0$ и 2) $\alpha \in (0, +\infty)$.

Решение. 1) Применим критерий I. Имеем

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha \in [\alpha_0, +\infty)} \int_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha \in [\alpha_0, +\infty)} e^{-\alpha A} = \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-\alpha_0 A} = 0,$$

то есть, интеграл сходится равномерно.

2) Аналогично,
$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha > 0} \int_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha > 0} e^{-\alpha A} \geq \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-\alpha_0 A} = e^{-1} > 0,$$

поскольку среди положительных α для любого $A > 0$ найдется $\alpha_0 = \frac{1}{A}$.

Следовательно, равномерной сходимости на втором множестве по α нет.

Пример 2. Найти $\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$.

Решение. Из оценки $\frac{1}{1+x^2+\alpha^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}$ по признаку III (Вейерштрасса), в силу сходимости несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$, заключаем, что указанный в условии интеграл сходится равномерно по α на \mathbf{R} .

Поэтому по теореме 1 (в силу непрерывности по α) будет верно равенство

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Пример 3. Исследовать на равномерную сходимость $\Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + \alpha^2 x^2}$ на множествах: 1) $\alpha \in [\alpha_0, +\infty)$, где $\alpha_0 > 0$ и 2) $\alpha \in (0, +\infty)$.

Решение. 1) Применим определение 2, которое в данной задаче имеет вид

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall \alpha \in [\alpha_0, +\infty) \text{ и } \forall \delta : \delta_\varepsilon < \delta < +\infty \mapsto \left| \int_\delta^{+\infty} \frac{dx}{1 + \alpha^2 x^2} \right| < \varepsilon.$$

Нам надо найти правило, по которому для каждого заранее заданного положительного ε можно указать δ_ε , обеспечивающее выполнение этого неравенства. Воспользуемся тем, что соответствующий неопределенный интеграл берущийся, т.е. равенством $\int \frac{dx}{1 + \alpha^2 x^2} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \alpha x + C$.

Согласно формуле Ньютона-Лейбница (для несобственного интеграла) и свойствам функции $\operatorname{arctg} x$, для любых положительных $\varepsilon, \delta_\varepsilon$ и α будут справедливы соотношения

$$0 < \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \alpha \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow \alpha \delta_\varepsilon = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha \varepsilon}{2} + \pi k \right) \quad \forall k \in \mathbf{Z}.$$

Вид δ_ε одинаков для любого целого k , поэтому положим $k = 0$. Тогда для

$$\delta_\varepsilon \text{ имеем } \alpha \delta_\varepsilon = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha \varepsilon}{2} \right) \Rightarrow \delta_\varepsilon = \frac{1}{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\alpha \varepsilon}{2}.$$

Наконец (проверьте это самостоятельно), поскольку $\frac{1}{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\alpha \varepsilon}{2}$ при $\alpha \varepsilon < \pi$ монотонно убывает по α , то в качестве искомой зависимости δ_ε от ε можно взять $\delta_\varepsilon = \frac{1}{\alpha_0} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_0 \varepsilon}{2}$. Что и доказывает равномерную сходимость интеграла.

2) Докажем отсутствие равномерной сходимости интеграла отрицанием критерия III (Коши), которое в данном случае имеет вид

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 : \exists \alpha_0 > 0, \exists \delta'_0 \geq \delta \text{ и } \exists \delta''_0 \geq \delta \mapsto \left| \int_{\delta'_0}^{\delta''_0} \frac{dx}{1 + \alpha_0^2 x^2} \right| \geq \varepsilon_0.$$

Подынтегральная функция положительна и монотонно убывает по x . Поэтому справедлива оценка

$$\left| \int_{\delta'_0}^{\delta''_0} \frac{dx}{1 + \alpha_0^2 x^2} \right| \geq \frac{\delta''_0 - \delta'_0}{1 + \alpha_0^2 \delta_0''^2} = \varepsilon_0.$$

При этом последнее равенство верно при следующих *допустимых* (проверьте это!) значениях $\forall \delta = \delta'_0 > 0, \delta''_0 = \delta'_0 + 1, \alpha_0 = \frac{1}{\delta_0''}, \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Действительно, при данных значениях параметров выполняются равенства

$$\frac{\delta''_0 - \delta'_0}{1 + \alpha_0^2 \delta_0''^2} = \frac{(\delta'_0 + 1) - \delta'_0}{1 + \left(\frac{1}{\delta_0''}\right)^2 \delta_0''^2} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0,$$

т.е. неравномерной сходимости нет по отрицанию критерия Коши.

Пример 4. Исследовать на равномерную сходимость $\Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$ на множествах: 1) $\alpha \in (-\infty, 0)$ и 2) $\alpha \in (0, +\infty)$.

Решение. 1) Применим признак Вейерштрасса. При любом $\alpha < 0$ справедливо неравенство $\int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Поскольку последний интеграл сходится, то исходный интеграл на множестве $\alpha \in (-\infty, 0)$ сходится равномерно.

2) Для $\alpha \in (0, +\infty)$ на множестве $x > \alpha$ подынтегральная функция положительна и монотонно убывающая по x . Тогда по отрицанию критерия Коши

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon_0 = \frac{1}{e}: \forall \delta > 0: \exists \alpha_0 = \delta \quad \text{и} \quad \exists \delta'_0 = \delta + 1 \quad \text{и} \quad \exists \delta''_0 = \delta + 2 \quad \mapsto \\ \mapsto \left| \int_{\delta'_0}^{\delta''_0} e^{-(x-\alpha)^2} dx \right| \geq e^{-(\delta'_0 - \alpha_0)^2} (\delta''_0 - \delta'_0) = \\ = e^{-((\delta + 1) - \delta)^2} ((\delta + 2) - (\delta + 1)) = \frac{1}{e} = \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Что означает отсутствие равномерной сходимости интеграла на множестве $\alpha \in (0, +\infty)$.

Пример 5. Исследовать на равномерную сходимость интегралы $\Phi_1(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ и $\Phi_2(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} dx$ на множестве: $\alpha \geq \alpha_0 > 0$.

Решение. 1) Для исследования интеграла $\Phi_1(\alpha)$ применим признак Дирихле. Интеграл вида $\int_1^{+\infty} f(x, \alpha)g(x, \alpha) dx$ сходится равномерно по α на множестве Ω , если на множестве $x \in [1, +\infty)$ при каждом $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ функции $f(x, \alpha)$, $g(x, \alpha)$ и $g'_x(x, \alpha)$ непрерывны по x и удовлетворяют следующим условиям.

В данном случае $f(x, \alpha) = \sin x$ непрерывна, а $g(x, \alpha) = \frac{1}{x^\alpha}$ непрерывно дифференцируема по x . Кроме того, имеем

1°. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$ при $\forall \alpha > 0$, а равномерность этого предельного перехода вытекает из очевидного неравенства

$$\frac{1}{x^{\alpha_0}} \geq \frac{1}{x^\alpha} \quad \forall x \in [1, +\infty), \forall \alpha \in [\alpha_0, +\infty).$$

2°. функция $g'_x(x, \alpha) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ знакопостоянна на $x \in [1, +\infty)$ при каждом $\alpha \geq \alpha_0 > 0$,

3°. Наконец, $\left| \int_1^x \sin u du \right| = |-\cos x + \cos 1| \leq M = 2 \quad x \in [1, +\infty) \forall$
при каждом $\alpha \geq \alpha_0 > 0$

Значит (по признаку Дирихле) интеграл $\Phi_1(\alpha)$ сходится равномерно.

2). Рассмотрим теперь случай интеграла $\Phi_2(\alpha)$. Здесь не будет выполняться условие 2°. Действительно, функция $g'_x(x, \alpha) = -\frac{\alpha x^{\alpha-1} + \cos x}{(x^\alpha + \sin x)^2}$ не является знакопостоянной на $x \in [1, +\infty)$ при $\alpha \in (0, 1)$. Иными словами, предельный переход 1° имеет место, но он *немонотонный*. Следовательно, признак Дирихле здесь бесполезен.

Применим для исследования сходимости $\Phi_2(\alpha)$ другой инструмент: формулу Тейлора в сочетании с доказанной ранее в курсе математического анализа теоремы о том, что,

если интеграл $\Phi(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha)$, где интеграл $Q(\alpha)$ сходится равномерно и абсолютно, то интегралы $\Phi(\alpha)$ и $P(\alpha)$ имеют один и тот же вид сходимости (или расходимости).

При помощи формулы Тейлора при $x \rightarrow +\infty$ получаем равенства

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} &= \frac{\frac{\sin x}{x^\alpha}}{1 + \frac{\sin x}{x^\alpha}} = \frac{\sin x}{x^\alpha} \cdot \left(1 - \frac{\sin x}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right) \right) = \\ &= \frac{\sin x}{x^\alpha} - \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{3\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Откуда интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} dx$ эквивалентен по характеру сходимости интегралу $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} dx$, поскольку интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится (как было показано выше) равномерно по признаку Дирихле, а интеграл $\int_1^{+\infty} o\left(\frac{1}{x^{3\alpha}}\right) dx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса (докажите это самостоятельно).

Осталось разобраться с видом сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} dx$. Если вспомнить материал 2 семестра, то ответ будет такой:

интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} dx$, а, значит, и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} dx$,

не сходится при $\alpha \leq \frac{1}{2}$ и сходится равномерно при $\alpha > \frac{1}{2}$.