

Построение общего решения линейной системы с переменными коэффициентами

Рассмотрим теперь вопрос о построении формулы, описывающей общее решение системы дифференциальных уравнений вида (5.1.1). Вначале дадим

Определение
5.2.1

Фундаментальной системой решений называется совокупность n любых линейно независимых частных решений однородной системы уравнений

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\|. \quad (5.2.1)$$

Лемма **Фундаментальные системы для систем (5.2.1) с**
5.2.1 **непрерывной матрицей $\|A(t)\|$ существуют.**

Доказательство.

В справедливости утверждения леммы убедимся непосредственным построением.

Во-первых, при некотором значении $t_0 \in \Omega$ выберем n линейно независимых n -мерных векторов $\{\vec{x}_{(1)}^0, \vec{x}_{(2)}^0, \dots, \vec{x}_{(n)}^0\}$.

Далее, пусть $\{\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \dots, \vec{x}_{(n)}(t)\}$ суть решения задач Коши вида

$$\|\dot{\vec{x}}_{(k)}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}_{(k)}(t)\|, \quad \vec{x}_{(k)}(t_0) = \vec{x}_{(k)}^0.$$

Эти решения – вектор-функции $\vec{x}_{(k)}(t)$, существуют и единственны.

Они линейно независимые, поскольку их значения при $t = t_0$ линейно независимые векторы, и равенство

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{x}_{(k)}(t) = \vec{o}(t) \quad \forall t \in \Omega$$

возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Лемма доказана.

Формулу для общего решения однородной системы дифференциальных уравнений вида (5.2.1) описывает

Теорема 5.2.1 Пусть вектор-функции $\{\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \dots, \vec{x}_{(n)}(t)\}$ являются линейно независимыми частными решениями однородной системы уравнений (5.2.1) с непрерывной матрицей $\|A(t)\| \forall t \in \Omega$, тогда общее решение этой системы имеет вид

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^n C_k \vec{x}_{(k)}(t), \quad (5.2.2)$$

где C_1, C_2, \dots, C_n – произвольные комплексные постоянные.

Определитель основной матрицы этой системы

$$\det \begin{vmatrix} x_{1(1)}(t_0) & x_{1(2)}(t_0) & \dots & x_{1(n)}(t_0) \\ x_{2(1)}(t_0) & x_{2(2)}(t_0) & \dots & x_{2(n)}(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n(1)}(t_0) & x_{n(2)}(t_0) & \dots & x_{n(n)}(t_0) \end{vmatrix} = W(t_0) \neq 0.$$

Тогда, согласно теореме Крамера, значения неизвестных – констант C_1^* , C_2^* , ..., C_n^* существуют и определяются однозначно.

В этом случае вектор-функция $\vec{x}^*(t) = \sum_{k=1}^n C_k^* \vec{x}_{(k)}(t)$ есть решение задачи Коши для системы (5.2.1) с начальным условием $\vec{x}^*(t_0) = \vec{x}_{(0)}(t_0)$. Равно как и вектор-функция $\vec{x}_{(0)}(t)$ является (по построению) решением этой же задачи Коши.

При $t = t_0$ $\vec{x}_{(0)}(t_0) = \vec{x}^*(t_0) = \sum_{k=1}^n C_k^* \vec{x}_{(k)}(t_0)$, значит, по теореме единственности они должны совпадать и $\forall t \in \Omega$. Таким образом получаем, что любое решение системы (5.2.1) представимо в виде (5.2.2).

Теорема доказана.

Альтернативной формулировкой доказанной теоремы является

Следствие 5.2.1 Множество всех решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений (5.2.1) является n -мерным линейным пространством, базисом в котором может служить любая фундаментальная система ее решений.

В вычислительной практике достаточно часто используют другую форму записи общего решения, основой которой служит

Определение
5.2.2

Фундаментальной матрицей однородной системы дифференциальных уравнений (5.2.1) называется квадратная матрица порядка n , столбцы которой суть координатные представления вектор-функций, образующих фундаментальную систему решений.

Пусть вектор-функции $\{ \vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \dots, \vec{x}_{(n)}(t) \ \forall t \in \Omega \}$ образуют фундаментальную систему решений. Тогда, во введенных выше обозначениях, фундаментальная матрица имеет вид

$$\|X(t)\| = \left\| \begin{array}{cccc} x_{1(1)}(t) & x_{1(2)}(t) & \dots & x_{1(n)}(t) \\ x_{2(1)}(t) & x_{2(2)}(t) & \dots & x_{2(n)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n(1)}(t) & x_{n(2)}(t) & \dots & x_{n(n)}(t) \end{array} \right\|,$$

а общее решение однородной системы (5.2.1) может быть представлено в форме

$$\|\vec{x}(t)\| = \|X(t)\| \|\vec{C}\|,$$

где $\|\vec{C}\| = \|C_1 C_2 \dots C_n\|^T$ – комплекснозначный вектор-столбец произвольных констант в записи решения.

Отметим, что фундаментальная матрица *не вырожденная* $\forall t \in \Omega$, поскольку ее детерминант является вронскианом линейно независимого набора решений системы (5.2.1).

В качестве упражнения самостоятельно покажите, что также справедлива

Теорема 5.2.2 Если $\|X(t)\|$ фундаментальная матрица системы (5.2.1), то

1°. Матрица $\|Y(t)\| = \|X(t)\| \|S\|$, где $\|S\|$ — произвольная квадратная невырожденная матрица порядка n , также фундаментальная матрица этой системы.

2°. Для двух любых фундаментальных матриц $\|X(t)\|$ и $\|Y(t)\|$ системы (5.2.1) существует, и притом единственная, квадратная невырожденная матрица $\|S\|$ такая, что $\|Y(t)\| = \|X(t)\| \|S\|$.

Универсального способа построения фундаментальной системы решений для (5.2.1), к сожалению, до сих пор не найдено. Однако имеется возможность вычисления частных решений этой однородной системы уравнений по другим, найденным ранее, ее частным решениям.

Вначале дадим

<p>Определение 5.2.3</p>	<p>Функция $\text{Sp}\ A(t)\ = \sum_{k=1}^n \alpha_{kk}(t)$ называется <i>следом</i> квадратной матрицы $\ A(t)\$ порядка n.</p>
-------------------------------------	---

Для этого понятия оказывается справедливой

<p>Лемма 5.2.2</p>	<p>Пусть квадратная матрица $\ Q(t)\$ в точке $t = t_0$ невырождена и дифференцируема. Тогда в этой точке</p>
-------------------------------	---

$$\frac{d \det \|Q(t)\|}{d t} = \text{Sp} \left(\|\dot{Q}(t)\| \cdot \|Q(t)\|^{-1} \right).$$

Доказательство.

Из формулы Тейлора следует, что

$$\|Q(t_0 + \Delta)\| = \|Q(t_0)\| + \|\dot{Q}(t_0)\|\Delta + \|o(\Delta)\| \quad \text{при } \Delta \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \det \|Q(t_0 + \Delta)\| &= \det \left[\|Q(t_0)\| + \|\dot{Q}(t_0)\|\Delta + \|o(\Delta)\| \right] = \\ &= \det \|Q(t_0)\| \cdot \det \left[\|E\| + \|\dot{Q}(t_0)\| \cdot \|Q(t_0)\|^{-1}\Delta + \|o(\Delta)\| \right]. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Теперь покажем, что при $\Delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \det \left[\|E\| + \|\dot{Q}(t_0)\| \cdot \|Q(t_0)\|^{-1}\Delta + \|o(\Delta)\| \right] &= \\ = 1 + \text{Sp} \left(\|\dot{Q}(t_0)\| \cdot \|Q(t_0)\|^{-1} \right) \Delta + o(\Delta). \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Действительно,

$$\det \left[\|E\| + \|\dot{Q}(t_0)\| \cdot \|Q(t_0)\|^{-1} \Delta + \|o(\Delta)\| \right] =$$

$$= \det \left\| \begin{array}{cccc} 1 + \beta_{11} \Delta + o & \beta_{12} \Delta + o & \dots & \beta_{1n} \Delta + o \\ \beta_{21} \Delta + o & 1 + \beta_{22} \Delta + o & \dots & \beta_{2n} \Delta + o \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} \Delta + o & \beta_{n2} \Delta + o & \dots & 1 + \beta_{nn} \Delta + o \end{array} \right\|,$$

$$\text{где } \beta_{ij} = \left(\|\dot{Q}(t_0)\| \cdot \|Q(t_0)\|^{-1} \right)_{ij} \quad \forall i, j = [1, n].$$

Из курса линейной алгебры известно, что детерминант квадратной матрицы представляется как сумма $n!$ слагаемых, каждое из которых есть произведение n различных элементов этой матрицы, взятых *по одному* из каждой строки и каждого столбца. Значит, (в рассматриваемом случае) только произведение элементов матрицы, стоящих на главной диагонали, есть величина порядка $O(1)$, а не $O(\Delta)$ или меньшего.

По той же причине члены порядка малости Δ могут содержаться только в произведении элементов, стоящих на главной диагонали, которое равно

$$(1 + \beta_{11}\Delta + o(\Delta))(1 + \beta_{22}\Delta + o(\Delta)) \dots (1 + \beta_{nn}\Delta + o(\Delta)) = \\ = 1 + \Delta \sum_{k=1}^n \beta_{kk} + o(\Delta) = 1 + \Delta \cdot \text{Sp} \left(\|\dot{Q}(t)\| \cdot \|Q(t)\|^{-1} \right) + o(\Delta),$$

что и доказывает равенство (5.2.4).

С его помощью равенство (5.2.3) может быть записано в виде

$$\frac{\det \|Q(t_0 + \Delta)\| - \det \|Q(t_0)\|}{\Delta} = \\ = \det \|Q(t_0)\| \cdot \text{Sp} \left(\|\dot{Q}(t)\| \cdot \|Q(t)\|^{-1} \right) + \frac{o(\Delta)}{\Delta},$$

перейдя в котором к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, получим

$$\frac{d \det \|Q(t)\|}{\det \|Q(t)\|} = \text{Sp} \left(\|\dot{Q}(t)\| \cdot \|Q(t)\|^{-1} \right).$$

Лемма доказана.

Рассмотрим снова однородную систему линейных дифференциальных уравнений (5.2.1)

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\|.$$

Как и раньше, будем предполагать, что матрица $\|A(t)\|$ непрерывна при $t \in \Omega$.

Пусть $\{\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \dots, \vec{x}_{(n)}(t)\}$ – некоторый набор любых частных решений системы (5.2.1), а $W(t) = \det \|X(t)\|$ – вронскиан этого набора решений. Тогда справедлива

Теорема 5.2.3 **Для любых $t_0, t \in \Omega$ верно соотношение (называемое формулой Лиувилля–Остроградского)**

(Лиувилля
– Остро-
градского)

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \text{Sp} \|A(u)\| du \right), \quad (5.2.5)$$

Доказательство.

Если частные решения $\{\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \dots, \vec{x}_{(n)}(t)\}$ линейно зависимы на множестве Ω , то $W(t) \equiv 0$, $t \in \Omega$ и равенство (5.2.5) очевидно.

В случае, когда эти частные решения линейно независимы, они образуют фундаментальную систему с фундаментальной матрицей $\|X(t)\|$, то есть вектор-функции $\{\vec{x}_{(1)}(t), \vec{x}_{(2)}(t), \dots, \vec{x}_{(n)}(t)\}$ суть столбцы этой матрицы. Тогда справедливо матричное равенство

$$\|\dot{X}(t)\| = \|A(t)\| \|X(t)\|.$$

Далее, из

$$\|\dot{X}(t)\| \|X(t)\|^{-1} = \|A(t)\| \|X(t)\| \|X(t)\|^{-1}$$

имеем

$$\|\dot{X}(t)\| \|X(t)\|^{-1} = \|A(t)\|,$$

а в силу леммы 5.2.2 получаем

$$\frac{\dot{W}(t)}{W(t)} = \frac{\det \|X(t)\|}{\det \|X(t)\|} = \text{Sp} \left(\|\dot{X}(t)\| \|X(t)\|^{-1} \right) = \text{Sp} \|A(t)\|$$

или, окончательно,

$$\frac{\dot{W}(t)}{W(t)} = \text{Sp} \|A(t)\|.$$

Интегрируя это равенство по t , получаем соотношение (5.2.5).

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай *неоднородной* системы линейных уравнений с переменными коэффициентами

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \|A(t)\|\|\vec{x}(t)\| + \|\vec{b}(t)\|. \quad (5.2.6)$$

Общее решение соответствующей однородной системы (5.2.1) будем считать известным, а матричные функции $\|A(t)\|$ и $\|\vec{b}(t)\|$ – непрерывными $\forall t \in \Omega$.

Согласно теореме 5.1.1 общее решение неоднородной системы представимо как сумма частного решения неоднородной и общего решения однородной систем уравнений. Следовательно, задача построения общего решения неоднородной системы сводится к поиску какого-нибудь частного решения неоднородной системы, для получения которого воспользуемся методом *вариации постоянных* (см. § 1.3 и теорему 2.5.1).

Пусть $\|X(t)\|$ – фундаментальная матрица однородной системы (5.2.1). В этом случае будет верна

Теорема 5.2.4 Система (5.2.6) имеет частное решение вида

$$\|\vec{x}^*(t)\| = \|X(t)\| \int_{t_0}^t \|X(u)\|^{-1} \|\vec{b}(u)\| du. \quad (5.2.7)$$

Доказательство.

Частное решение неоднородной системы (5.2.6) будем искать в виде

$$\|\vec{x}^*(t)\| = \|X(t)\| \|\vec{C}(t)\|,$$

где $\vec{C}(t)$ некоторая неизвестная заранее непрерывно дифференцируемая вектор-функция.

Подставив это выражение в (5.2.6), с учетом равенства

$$\|\dot{X}(t)\| = \|A(t)\| \|X(t)\|,$$

получим

$$\begin{aligned} \|A(t)\| \|X(t)\| \|\vec{C}(t)\| + \|X(t)\| \|\dot{\vec{C}}(t)\| &= \\ &= \|A(t)\| \|X(t)\| \|\vec{C}(t)\| + \|\vec{b}(t)\|. \end{aligned}$$

Откуда, в силу невырожденности фундаментальной матрицы,

$$\|\dot{\vec{C}}(t)\| = \|X(t)\|^{-1} \|\vec{b}(t)\|$$

и, окончательно,

$$\|\vec{x}^*(t)\| = \|X(t)\| \int_{t_0}^t \|X(u)\|^{-1} \|\vec{b}(u)\| du.$$

Теорема доказана.