

Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (случай жорданова базиса)

Рассмотрим теперь процедуру построения общего решения системы уравнений (3.1.1) в случае, когда условия теоремы 3.1.3 не выполнены. Такая ситуация может возникнуть при наличии *кратных* корней у характеристического уравнения линейного преобразования \hat{A} , задаваемого в U^n матрицей $\|A\|$.

Действительно, из курса линейной алгебры известно, что размерность собственного подпространства, отвечающего собственному значению кратности k , не меньше, чем единица, но не больше, чем k . Поэтому максимальное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению кратности $k \geq 2$, может оказаться строго меньше, чем k . Это, в свою очередь, будет означать, что полное число линейно независимых собственных векторов линейного оператора $\|A\|$ окажется меньше n — размерности U^n , — ибо полное число корней характеристического уравнения (с учетом их кратности) всегда равно n . И, следовательно, в линейном пространстве частных решений системы уравнений (3.1.1) не удастся построить базис вида, указанного в формулировке теоремы 3.1.3.

Примером матрицы с подобными свойствами является квадратная матрица порядка $l \geq 2$ следующего вида

$$\|J_l(\lambda_0)\| = \left\| \begin{array}{ccccccc} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\|. \quad (3.2.1)$$

Такую матрицу называют *жордановой клеткой* порядка l . У нее все элементы, стоящие на главной диагонали, одинаковы, элементы, расположенные на первой наддиагонали, равны единице, а остальные элементы — нули.

Матрица $\|J_l(\lambda_0)\|$, определяющая некоторое линейное преобразование \widehat{J}_l в U^l , имеет единственное собственное значение $\lambda = \lambda_0$ кратности l , которому отвечает лишь один линейно независимый собственный вектор $\|f\| = \|1\ 0\ 0 \dots 0\|^T$, поскольку $\text{rg } \|\widehat{J}_l(\lambda_0) - \lambda_0 \widehat{E}\| = l - 1$. Иначе говоря, размерность собственного подпространства равна единице, и базис из собственных векторов $\|J_l(\lambda_0)\|$ в U^l не существует.

Здесь стоит отметить, что, во-первых, система (3.1.1) в случае, когда $\|A\| = \|J_l(\lambda_0)\|$, легко решается. Это показано в конце данного параграфа. И, во-вторых, элементы базиса в U^l , в котором преобразование $\|\hat{A}\|$ имеет матрицу вида (3.2.1), должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
 \|\hat{A}\| \|h_{(1)}\| &= \lambda_0 \|h_{(1)}\|, & \|\hat{A} - \lambda_0 \hat{E}\| \|h_{(1)}\| &= \|o\|, \\
 \|\hat{A}\| \|h_{(2)}\| &= \lambda_0 \|h_{(2)}\| + \|h_{(1)}\|, & \|\hat{A} - \lambda_0 \hat{E}\| \|h_{(2)}\| &= \|h_{(1)}\|, \\
 \|\hat{A}\| \|h_{(3)}\| &= \lambda_0 \|h_{(3)}\| + \|h_{(2)}\|, & \|\hat{A} - \lambda_0 \hat{E}\| \|h_{(3)}\| &= \|h_{(2)}\|, \\
 \dots & & \dots & \\
 \|\hat{A}\| \|h_{(l)}\| &= \lambda_0 \|h_{(l)}\| + \|h_{(l-1)}\| & \|\hat{A} - \lambda_0 \hat{E}\| \|h_{(l)}\| &= \|h_{(l-1)}\|.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.2}$$

Действительно, согласно определению матрицы линейного преобразования, ее столбцами (в некотором конкретном базисе $\{\|h_{(1)}\|, \|h_{(2)}\|, \dots, \|h_{(l)}\|\}$) являются координатные столбцы образов базисных элементов. Тогда, учитывая структуру матрицы (3.2.1), мы приходим к формулам (3.2.2).

Теперь покажем, что в пространстве частных решений системы (3.1.1) возможно построить базис, позволяющий описать ее общее решение, добавив к собственным векторам $\|A\|$ дополнительные элементы пространства U^n , определяемые формулами (3.2.2).

Рассмотрим эту процедуру подробнее. Пусть λ_0 – собственное значение, а $\|h_{(1)}\|$ – соответствующий ему собственный вектор линейного преобразования $\|\hat{A}\|$, действующего в U^n . Тогда можно дать

Определение
3.2.1

Элементы $\|h_{(1)}\|, \|h_{(2)}\|, \dots, \|h_{(l)}\|$, принадлежащие U^l и являющиеся решениями уравнений

$$\begin{aligned} \|\hat{A} - \lambda_0 \hat{E}\| \|h_{(1)}\| &= \|o\|, \\ \|\hat{A} - \lambda_0 \hat{E}\| \|h_{(2)}\| &= \|h_{(1)}\|, \\ \|\hat{A} - \lambda_0 \hat{E}\| \|h_{(3)}\| &= \|h_{(2)}\|, \\ &\dots\dots\dots \\ \|\hat{A} - \lambda_0 \hat{E}\| \|h_{(l)}\| &= \|h_{(l-1)}\|, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

в то время как уравнение

$$\|\hat{A} - \lambda_0 \hat{E}\| \|h_{(l+1)}\| = \|h_{(l)}\|$$

решений не имеет, называются *жордановой цепочкой* длиной l , начинающейся с собственного вектора $\|h_{(1)}\|$.

Элементы $\|h_{(2)}\|, \|h_{(3)}\|, \dots, \|h_{(l)}\|$ называются *присоединенными векторами* к вектору $\|h_{(1)}\|$.

Заметим также, что уравнения (3.2.3) можно записать в других формах, а именно: если обозначить $\|\widehat{B}\| = \|\widehat{A} - \lambda_0 \widehat{E}\|$, то в виде

$$\begin{aligned}
 \|\widehat{B}\| \|h_{(1)}\| &= \|o\|, & \implies & \|\widehat{B}\| \|h_{(1)}\| = \|o\|, \\
 \|\widehat{B}\| \|h_{(2)}\| &= \|h_{(1)}\|, & \implies & \|\widehat{B}\|^2 \|h_{(2)}\| = \|o\|, \\
 \|\widehat{B}\| \|h_{(3)}\| &= \|h_{(2)}\|, & \implies & \|\widehat{B}\|^3 \|h_{(3)}\| = \|o\|, & (3.2.4) \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & & & \\
 \|\widehat{B}\| \|h_{(l)}\| &= \|h_{(l-1)}\|, & \implies & \|\widehat{B}\|^l \|h_{(l)}\| = \|o\|.
 \end{aligned}$$

Опишем теперь основные свойства жордановых цепочек.

Теорема 3.2.1 **Множество элементов в U^l , являющихся**
 – **какой-либо жордановой цепочкой;**
 – **либо объединением нескольких различ-**
 ных жордановых цепочек,
 линейно независимое.

Доказательство

Докажем первое утверждение.

Из соотношений (3.2.4) следует, что

$$\|\widehat{B}\|^s \|h_{(s+1)}\| = \|h_{(1)}\| \quad \forall s = [1, l-1]$$

и

(3.2.5)

$$\|\widehat{B}\|^r \|h_{(s+1)}\| = \|o\| \quad \forall r > s, \forall s = [1, l-1],$$

поскольку результат умножения матрицы $\|\widehat{B}\|$ на присоединенный вектор есть или присоединенный вектор с номером на единицу меньшим, или же нулевой столбец. Действительно, $\forall s = [1, l-1]$:

$$\begin{aligned} \|\widehat{B}\|^s \|h_{(s+1)}\| &= \|\widehat{B}\|^{s-1} \|\widehat{B}\| \|h_{(s+1)}\| = \|\widehat{B}\|^{s-1} \|h_{(s)}\| = \dots \\ \dots &= \|\widehat{B}\|^2 \|h_{(3)}\| = \|\widehat{B}\| \|\widehat{B}\| \|h_{(3)}\| = \|\widehat{B}\| \|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\|. \end{aligned}$$

Пусть

$$C_1 \|h_{(1)}\| + C_2 \|h_{(2)}\| + \dots + C_l \|h_{(l)}\| = \|o\| .$$

Покажем, что в этом случае линейная комбинация в левой части равенства тривиальная.

Действительно, умножив обе части равенства на $\|\widehat{B}\|^{l-1}$, получим

$$\|\widehat{B}\|^{l-1} (C_1 \|h_{(1)}\| + C_2 \|h_{(2)}\| + \dots + C_l \|h_{(l)}\|) = \|o\| ,$$

$$C_1 \|\widehat{B}\|^{l-1} \|h_{(1)}\| + C_2 \|\widehat{B}\|^{l-1} \|h_{(2)}\| + \dots + C_l \|\widehat{B}\|^{l-1} \|h_{(l)}\| = \|o\|$$

или (с учетом (3.2.5)):

$$C_l \|h_{(1)}\| = \|o\| \implies C_l = 0 .$$

Затем, подставив $C_l = 0$ и умножив обе части на $\|\widehat{B}\|^{l-2}$, получим

$$C_{l-1} \|h_{(1)}\| = \|o\| \implies C_{l-1} = 0$$

и т.д.

А из тривиальности рассматриваемой линейной комбинации следует справедливость первого утверждения теоремы.

Второе утверждение доказывается аналогично.

Теорема доказана.

В курсе линейной алгебры (см., например, [?]) также доказывается, важная для рассматриваемой задачи,

Теорема Для любого линейного преобразования \hat{A} в U^n существует базис (называемый *жордановым*), образованный из всех жордановых цепочек для всех попарно различных собственных значений этого преобразования.

3.2.2 (Жордана)

Определение
3.2.2

Жордановым блоком, отвечающим собственному значению λ_0 кратности k с q -мерным собственным подпространством, назовем квадратную порядка k блочно-диагональную матрицу $\|J(\lambda_0)\|$ вида

$$\left\| \begin{array}{cccc} \|J_{l_1}(\lambda_0)\| & \|O\| & \dots & \|O\| \\ \|O\| & \|J_{l_2}(\lambda_0)\| & \dots & \|O\| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \|O\| & \|O\| & \dots & \|J_{l_q}(\lambda_0)\| \end{array} \right\|,$$

где расположенные на главной диагонали квадратные подматрицы $\|J_{l_1}\|$, $\|J_{l_2}\|$, \dots , $\|J_{l_q}\|$ суть жордановы клетки вида (3.2.1), отвечающие собственному значению λ_0 и каждому из q линейно независимых собственных векторов, начинающих соответствующие жордановы цепочки, имеющих длины l_1, l_2, \dots, l_q .

Через $\|O\|$ обозначены нулевые подматрицы подходящего размера.

Отметим, что при этом сумма порядков (размеров) жордановых клеток в блоке равна кратности собственного значения λ_0 , то есть

$$l_1 + l_2 + \dots + l_q = k.$$

Например, жордановы блоки с $k = 4$ и $q = 2$ могут иметь вид

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| \quad \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| \quad \left\| \begin{array}{c|ccc} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\|.$$

Пусть линейное преобразование $\|\widehat{A}\|$, действующее в U^n , заданное матрицей $\|A\|$, имеет характеристический многочлен вида

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s} ,$$

причем $\lambda_j \neq \lambda_i$ при $j \neq i$ и $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$.

**Определение
3.2.3**

Будем говорить, что матрица $\|A\|$ имеет *нормальную жорданову форму*, если она записана в блочно-диагональном виде (см. рис. 3.1):

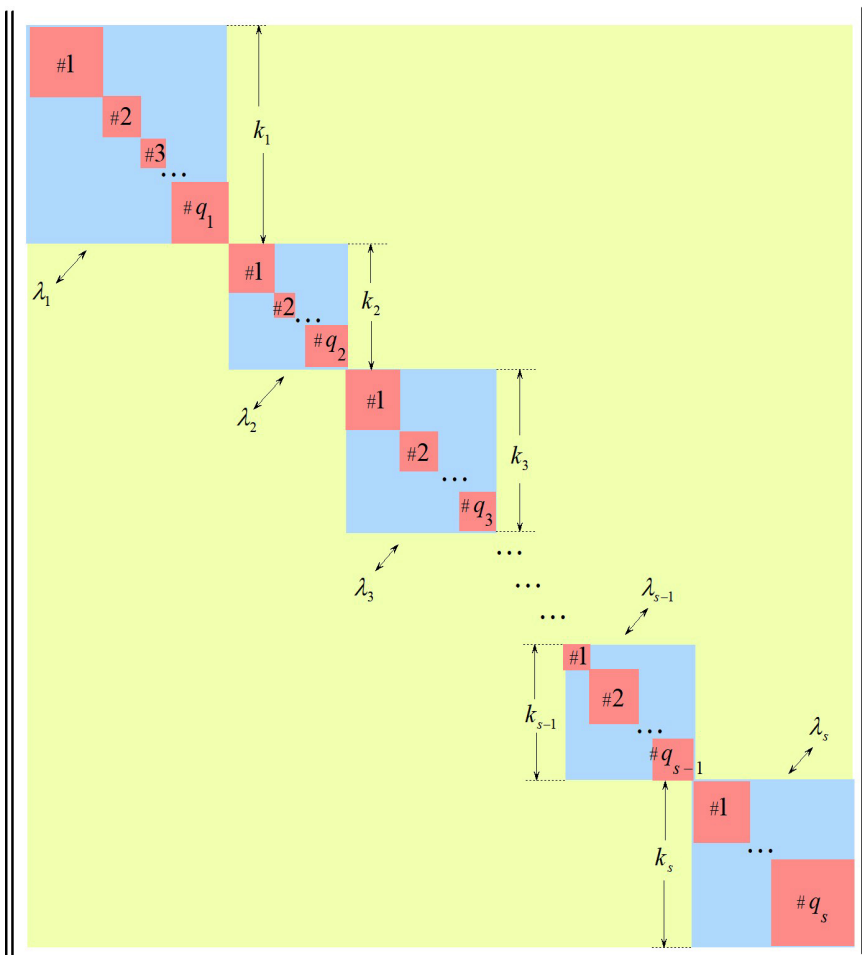
$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} \|J(\lambda_1)\| & \|O\| & \dots & \|O\| \\ \|O\| & \|J(\lambda_2)\| & \dots & \|O\| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \|O\| & \|O\| & \dots & \|J(\lambda_s)\| \end{array} \right\| ,$$

где расположенные на главной диагонали квадратные подматрицы

$$\|J(\lambda_1)\|, \|J(\lambda_2)\|, \dots, \|J(\lambda_s)\|$$

являются жордановыми блоками, отвечающими попарно различным собственным значениям преобразования \widehat{A} , а через $\|O\|$ обозначены нулевые подматрицы подходящего размера.

Резюмируя определения (3.2.1) – (3.2.3), можно сказать, что матрица имеет нормальную жорданову форму, если у нее на главной диагонали расположены s жордановых блоков, где s – число различных собственных значений матрицы $\|A\|$, а остальные элементы – нули.



Жорданова матрица



Жордановы блоки



Жордановы клетки

Здесь символ # означает номер клетки в блоке

Рис. 1. Нормальная жорданова форма матрицы

Если q_j равно максимальному числу *линейно независимых* собственных векторов, отвечающих λ_j , то для матрицы $\|A\|$ в жордановой форме будут справедливы следующие утверждения.

- 1°. Число ее жордановых блоков равно числу различных собственных значений матрицы $\|A\|$.
- 2°. Размер каждого блока равен кратности собственного значения, соответствующего этому блоку. Сумма размеров всех блоков равна n – размеру матрицы $\|A\|$.
- 3°. Число жордановых клеток в жордановом блоке равно размерности собственного подпространства собственного значения, соответствующего этому блоку, и равно числу жордановых цепочек, начинающихся с различных линейно независимых собственных векторов этого подпространства.
- 4°. Сумма размеров всех жордановых клеток в жордановом блоке равна размеру этого блока, то есть кратности собственного значения, соответствующего данному блоку.

Теорема 3.2.3 Матрица каждого линейного преобразования в U^n имеет в жордановом базисе нормальную жорданову форму.

Доказательство

По определению столбцами матрицы линейного оператора в конкретном базисе служат координатные представления образов базисных элементов.

Пусть базис жорданов и состоит из объединения всех жордановых цепочек, отвечающих собственным значениям матрицы $\|A\|$, то есть имеет вид

$$\left\{ \dots, \|h_{(s1)}\|, \|h_{(s2)}\|, \dots, \|h_{(sl)}\|, \dots \right\},$$

где s – номер цепочки. Тогда первый из наборов равенств (3.2.2) можно рассматривать как координатные разложения образов базисных элементов по жорданову базису, которые существуют и единственны.

Значит, координатное представление образа каждого базисного элемента является столбцом, у которого все компоненты нулевые, за исключением одного, равного λ_{0s} , или двух, равных 1 и λ_{0s} соответственно.

Следовательно, матрица $\|A\|$ в жордановом базисе имеет жорданову форму.

Теорема доказана.

Теоремы 3.2.2 (Жордана) и 3.2.3 в совокупности утверждают, что для любого линейного преобразования в U^n имеется жорданов базис, в котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму, то есть состоит из жордановых клеток вида (3.2.1), расположенных вдоль главной диагонали. Воспользуемся этим фактом для решения однородной системы (3.1.1) в случае, когда условия теоремы 3.1.3 не выполняются.

Пусть невырожденная матрица

$$\|S\| = \left\| \begin{array}{cccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{array} \right\|$$

есть матрица перехода от исходного базиса в U^n к жорданову базису. Тогда матрица $\|J\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|$ будет иметь жорданову форму, причем (как показывается в курсе линейной алгебры) характеристические многочлены у матриц $\|J\|$ и $\|A\|$ одинаковые. А, значит, корни их характеристических уравнений одинаковые и одинаковой кратности.

Выполнив замену неизвестных в системе $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$ по формуле

$$\|x(t)\| = \|S\|\|y(t)\| \quad \text{или} \quad x_i(t) = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} y_j(t) \quad \forall i = [1, n], \quad (3.2.6)$$

получим $\|S\|\|\dot{y}\| = \|A\|\|S\|\|y\|$ или $\|\dot{y}\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|\|y\|$, и окончательно

$$\|\dot{y}\| = \|J\|\|y\|, \quad (3.2.7)$$

где $\|J\|$ — жорданова матрица.

Система уравнений (3.2.7) имеет блочно-диагональную матрицу. Поэтому решения $y(t)$ можно искать для каждой жордановой клетки отдельно.

Например, для самой первой клетки, положив $\lambda = \lambda_1$ и $l = l_1$,
имеем (с учетом (3.2.4)) подсистему вида

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dots \\ \dot{y}_{l-1} \\ \dot{y}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{l-1} \\ y_l \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3, \\ \dot{y}_3 = \lambda y_3 + y_4, \\ \dots \\ \dot{y}_{l-1} = \lambda y_{l-1} + y_l, \\ \dot{y}_l = \lambda y_l. \end{cases}$$

Последнюю систему удобнее решать сделав предварительно подстановку

$$y_j(t) = e^{\lambda t} u_j(t) \quad \forall j = [1, l].$$

В этом случае для $u_j(t) \forall j = [1, l]$ получаем систему

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = u_2(t), \\ \dot{u}_2(t) = u_3(t), \\ \dot{u}_3(t) = u_4(t), \\ \dots\dots\dots \\ \dot{u}_{l-1}(t) = u_l(t), \\ \dot{u}_l(t) = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, начиная с последнего уравнения, найдем, что

$$u_l(t) = C_l,$$

$$u_{l-1}(t) = C_l t + C_{l-1},$$

$$u_{l-2}(t) = C_l \frac{t^2}{2} + C_{l-1} t + C_{l-2},$$

.....

$$u_1(t) = C_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + C_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1.$$

Откуда

$$y_l(t) = C_l e^{\lambda t},$$

$$y_{l-1}(t) = \left(C_l t + C_{l-1} \right) e^{\lambda t},$$

$$y_{l-2}(t) = \left(C_l \frac{t^2}{2} + C_{l-1} t + C_{l-2} \right) e^{\lambda t}, \tag{3.2.8}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y_1(t) = \left(C_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + C_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1 \right) e^{\lambda t}.$$

Проведя аналогичные вычисления для всех клеток во всех жордановых блоках, получим общее решение системы уравнений (3.2.7).

Переход к исходным неизвестным выполняется по формулам (3.2.6), которые позволяют получить общее решение системы (3.1.1), итоговый вид которого определяет

Теорема 3.2.4 **Общее решение однородной системы (3.1.1) есть вектор-функция, каждая компонента которой имеет вид**

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^q P_{ij}(t) e^{\lambda_j t} \quad \forall i = [1, n],$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ — все попарно различные собственные значения преобразования, заданного матрицей $\|A\|$, а $P_{ij}(t)$ — алгебраический многочлен:

- степень которого на единицу меньше максимальной из длин жордановых цепочек, отвечающих собственному значению λ_j ;
- и коэффициенты которого зависят от n произвольных комплексных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n .

Заметьте, что набор констант C_1, C_2, \dots, C_n должен быть одинаков для всех многочленов $P_{ij}(t)$.

В заключение обсуждения вопроса о построении общего решения системы (3.1.1) сделаем некоторые замечания.

Во-первых, из теоремы 3.2.4 следует, что общее решение системы (3.1.1) можно искать методом неопределенных коэффициентов, формально не прибегая к построению жорданова базиса. Возможный вариант такого подхода описан в приложении. Во-вторых, в случае вещественной матрицы $\|A\|$ выделение вещественного решения выполняется тем же методом, что был рассмотрен в § 3.1.

Наконец, для задач с невысокой размерностью, которые часто встречаются в приложениях, целесообразно использовать итоговые формулы (3.2.8) для общих решений, записанные в удобном для запоминания формате.

Приведем их в исходных переменных (без вывода) для $n = 2, 3$, исключая случаи, удовлетворяющие условиям теоремы 3.1.3.

Пусть $n = 2$ и λ есть двукратное собственное значение, у которого собственное подпространство одномерное. Тогда общее решение системы (3.1.1) можно представить в виде

$$\|x(t)\| = C_1 \|h_{(1)}\| e^{\lambda t} + C_2 (\|h_{(1)}\| t + \|h_{(2)}\|) e^{\lambda t}, \quad (3.2.9)$$

где $\|h_{(1)}\|$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ , а $\|h_{(2)}\|$ – присоединенный к нему вектор, найденный по формулам (3.2.2).

Пусть теперь $n = 3$. В случае, когда λ_1 простое и ему отвечает собственный вектор $\|h_{(1)}\|$, а λ_2 двукратное с собственным вектором $\|h_{(2)}\|$ и присоединенным $\|h_{(3)}\|$, формула общего решения такова:

$$\|x(t)\| = C_1 \|h_{(1)}\| e^{\lambda_1 t} + C_2 \|h_{(2)}\| e^{\lambda_2 t} + C_3 (\|h_{(2)}\| t + \|h_{(3)}\|) e^{\lambda_2 t} .$$

Если в трехмерной задаче кратность собственного значения λ равна трем, то возможны два случая.

Или размерность собственного подпространства есть два, и жордановых цепочек две, одна из которых состоит лишь из собственного вектора $\|h_{(1)}\|$, а вторая состоит из собственного вектора $\|h_{(2)}\|$ и присоединенного $\|h_{(3)}\|$, тогда решение имеет вид

$$\|x(t)\| = C_1 \|h_{(1)}\| e^{\lambda t} + C_2 \|h_{(2)}\| e^{\lambda t} + C_3 (\|h_{(2)}\| t + \|h_{(3)}\|) e^{\lambda t} .$$

Или же размерность собственного подпространства с собственным вектором $\|h_{(1)}\|$ равна единице, то в единственной жордановой цепочке будут два присоединенных к $\|h_{(1)}\|$ вектора $\|h_{(2)}\|$ и $\|h_{(3)}\|$. Общее решение в этом случае дается формулой

$$\begin{aligned} \|x(t)\| = & \left(C_1 \|h_{(1)}\| + C_2 (\|h_{(1)}\| t + \|h_{(2)}\|) + \right. \\ & \left. + C_3 \left(\|h_{(1)}\| \frac{t^2}{2!} + \|h_{(2)}\| \frac{t}{1!} + \|h_{(3)}\| \right) \right) e^{\lambda t} . \end{aligned}$$

Во всех формулах C_1 , C_2 и C_3 – произвольные комплексные константы.

Следует заметить, что использование теоремы Жордана возможно потребует бóльших вычислительных ресурсов, чем представляется изначально.

Дело в том, что жорданова цепочка, вообще говоря, может начинаться не с любого собственного вектора, отвечающего конкретному собственному значению. Например, в U^3 линейное преобразование, заданное матрицей

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

имеет троекратное нулевое собственное значение и, соответствующее ему, двумерное собственное подпространство.

Убедитесь непосредственной проверкой, что для собственного вектора $\|1\ 0\ 0\|^T$ присоединенные векторы существуют, а для $\|0\ 1\ 0\|^T$ — не существуют. То есть для построения жордановой цепочки предварительно надо найти те собственные векторы, для которых уравнения (3.2.2) разрешимы.