

Уравнения первого порядка в дифференциалах

Если в уравнении (1.1.1) производную $y'(x)$ представить как отношение дифференциалов переменных y и x , то оно может быть записано в виде $dy - f(x, y)dx = 0$, что позволяет рассматривать уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1.4.1)$$

как обобщение линейного уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$, называемое *уравнением первого порядка в дифференциалах*.

Мы будем предполагать, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области $\Omega \in E^2$.

Что есть решение уравнения в дифференциалах?

Определение 1.4.2	Непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\left\ \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\ $, где $t \in \Theta \subseteq R$, называется <i>частным решением</i> уравнения (1.4.1), если $\forall t \in \Theta$: <ul style="list-style-type: none">– $\left\ \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\ \in \Omega$;– $x'(t) + y'(t) > 0$;– $P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0$.
----------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Из этого определения следует, что изображающая частное решение интегральная кривая является в области Ω гладкой линией, заданной параметрически как $\left\| \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\| \forall t \in \Theta$. Эта интегральная кривая не обязательно является графиком какой-либо функции $y = y(x)$. Она может иметь участки, которые есть графики функции $x = x(y)$.

Рассмотрим методы решения линейных уравнений первого порядка в дифференциалах. К этим методам можно отнести рассмотренные ранее случаи уравнений с разделяющимися переменными и однородных уравнений.

Однако здесь имеются и новые возможности. Пусть в области Ω $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны. Тогда можно дать

Определение
1.4.3

Дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее вид (1.4.1), называется *уравнением первого порядка в полных дифференциалах*, если существует функция $U(x, y)$, непрерывно дифференцируемая в области Ω такая, что

$$dU \equiv P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

В этом случае все решения уравнения (1.4.1) удовлетворяют равенству $U(x, y) = C$.

Выясним, при каких условиях на $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ такая функция $U(x, y)$ существует. А если существует, то как ее можно найти?

Необходимым условием существования такой функции является выполнение равенства:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (1.4.3)$$

которое, в силу определения 1.4.3 и условия непрерывности вторых частных производных функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, вытекает из

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Нужно отметить, что в случае, когда область Ω является *одно-связной*, условие (1.4.3) оказывается *достаточным* для существования функции $U(x, y)$. Соответствующая теорема доказывается в курсе математического анализа.

Конкретный вид функции $U(x, y)$ может быть найден из системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) , \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) . \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Задача 1.4.1 Решить уравнение

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0 .$$

Решение. Сначала проверим выполнение условия (1.4.3). Коэффициенты при дифференциалах суть непрерывно дифференцируемые функции на всей координатной плоскости и для них

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y} = \frac{\partial Q}{\partial x} ,$$

то есть данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Система уравнений (1.4.4) в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = e^{-y} , \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -2y - xe^{-y} . \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы находим, что $U(x, y) = xe^{-y} + C(y)$. Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем

$$-xe^{-y} + C'(y) = -2y - xe^{-y} \quad \Rightarrow \quad C(y) = -y^2 + K.$$

Решение И, окончательно, из $U(x, y) = xe^{-y} - y^2 + K$ получаем
получено. ответ задачи: $xe^{-y} - y^2 = C$.

Пусть теперь уравнение (1.4.1) таково, что в Ω $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, то есть данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

В этом случае можно поставить задачу поиска непрерывно дифференцируемой и не равной тождественно нулю в области Ω функции $\mu(x, y)$, такой что $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$.

Например для уравнения $x^2y^3 dx + (x^3y^2 + x) dy = 0$ – это функция $\mu(x, y) = \frac{1}{xy}$, поскольку после умножения на нее, уравнение становится уравнением в полных дифференциалах:

$$xy^2 dx + x^2y dy + \frac{dy}{y} = 0 \quad \text{или} \quad d\left(\frac{x^2y^2}{2} + \ln|y|\right) = 0.$$

Заметим, что при этом теряются решения исходного уравнения: $x = 0$ и $y = 0$.

Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы и не обращаются в ноль одновременно в Ω , то такая функция, называемая *интегрирующим множителем*, существует (всегда!) и удовлетворяет, следующему из (1.4.3), уравнению

$$Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \mu. \quad (1.4.5)$$

Уравнение (1.4.5) есть уравнение в частных производных первого порядка и его интегрирование, вообще говоря, более сложная задача, чем поиск решений уравнения (1.4.1).

Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

Рассмотрим теперь методы решения уравнений 1-го порядка, не разрешенных относительно производной. Эти уравнения согласно формуле (0.1.3) при $n = 1$ и определению (0.1.4) записываются в виде

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1.5.1)$$

где $F(x, y, z)$ – известная функция от трех переменных, непрерывная в непустой области $\Omega \subseteq E^3$, а $y(x)$ – искомая функция от $x \in X$.

В рамках этого параграфа условимся обозначать «штрихом» дифференцирование по переменной x , а «верхней точкой» дифференцирование по t . Для дальнейших рассуждений оказывается удобным

<p>Определение 1.5.1</p>	<p>Вектор-функция</p> $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in \Theta \quad (1.5.2)$ <p>называется <i>частным решением в параметрической форме</i> дифференциального уравнения (1.5.1), если $\forall t \in \Theta$:</p> <ul style="list-style-type: none"> - $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы ;
	<ul style="list-style-type: none"> - $\varphi(t) \in X$, $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ и $\left\ \begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) & \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} \end{pmatrix}^T \right\ \in \Omega$; - $F \left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} \right) = 0$.

Для решения уравнения (1.5.1) в общем случае можно применить *метод введения параметра*, состоящего в замене $y' = p$ с последующим решением алгебраическо-дифференциальной системы уравнений:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ dy = p dx. \end{cases} \quad (1.5.3)$$

Имеет место

Теорема 1.5.1 Система уравнений (1.5.3) и уравнение (1.5.1) равносильны.

Если $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \Theta$ – решение уравнения (1.5.1), то в силу

$$p(t) = y'(x) = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} = \frac{\dot{\psi}(t) dt}{\dot{\varphi}(t) dt} = \frac{dy}{dx}$$

Опишем теперь схему решения системы (1.5.3). Предположим, что существуют непрерывно дифференцируемые функции $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ и $p = h(u, v)$, определенные для всех $(u, v) \in \Psi \subseteq E^2$, такие, что

$$F(f(u, v), g(u, v), h(u, v)) \equiv 0.$$

Кроме того потребуем, чтобы ранг матрицы Якоби был равен двум, то есть чтобы

$$\operatorname{rg} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial v} \end{vmatrix} = 2.$$

Отметим, что геометрически данную замену переменных можно трактовать как смену представления некоторой гладкой поверхности S в E^3 при помощи уравнения $F(x, y, p) = 0$ на ее параметрическое описание:

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v), \\ p = h(u, v) \end{cases} \quad \forall (u, v) \in \Psi. \quad (1.5.4)$$

Если сформулированные выше условия на функции $f(u, v)$, $g(u, v)$ и $h(u, v)$ выполнены, то в силу (доказываемой в курсе математического анализа) теоремы о замене переменных в записи системы (1.5.3) можно перейти от переменных $\{x, y, p\}$ к переменным $\{u, v\}$. При этом первое ее уравнение удовлетворяется в Ψ тождественно, а второе принимает вид

$$\frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv = h(u, v) \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \right)$$

или

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u} - h \frac{\partial f}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial g}{\partial v} - h \frac{\partial f}{\partial v} \right) dv = 0. \quad (1.5.5)$$

Задача Решить уравнение
1.5.1

$$2xy' - y = y' \ln yy' .$$

Решение . Исходное уравнение можно привести к виду

$$xu' - u = \frac{u'}{2} \ln \frac{u'}{2}$$

умножением обеих его частей на y с последующей заменой $u = y^2$. А поскольку $y = 0$ не является решением, то новое уравнение равносильно исходному.

Полученное уравнение есть, так называемое *уравнение Клеро*, решение которого можно найти в справочниках. Однако мы воспользуемся не информационным ресурсом, а изложенной выше схемой.

Разрешая это уравнение относительно u и полагая $u' = p$, получаем систему (1.5.3) в виде

$$\begin{cases} u = xp - \frac{p}{2} \ln \frac{p}{2}, \\ du = p dx. \end{cases} \quad (1.5.6)$$

Дифференцируя первое уравнение по x и подставляя в него $u' = p$, получаем

$$p' \left(x - \frac{1}{2} \ln \frac{p}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Теперь, либо

$$p' = 0 \implies p = C \quad \forall C > 0 \quad \text{и из (1.5.6)} \implies$$

$$\implies u = Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2} \implies y^2 = Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2},$$

либо

$$x - \frac{1}{2} \ln \frac{p}{2} - \frac{1}{2} = 0 \implies p = 2e^{2x-1},$$

Решение что, в свою очередь, при подстановке в *первое* уравнение получено. системы (1.5.6), дает $y^2 = e^{2x-1}$.

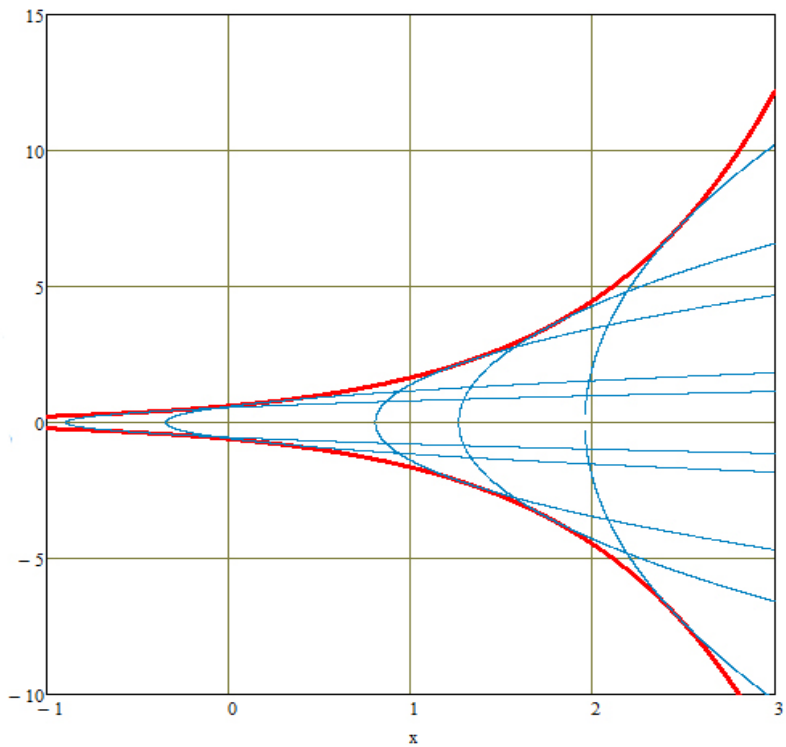


Рис. 1. Интегральные кривые для уравнения в задаче 1.5.1

Задача Коши для уравнений, не разрешенных относительно производной

Тот факт, что для уравнений вида (1.5.1) упорядоченная пара чисел $\{x_0; y_0\}$ может вовсе не определять или же определять неоднозначно (даже локально!) частное решение таких уравнений, приводит к необходимости изменения постановки задачи Коши для уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной.

Определение
1.5.2

Задача Коши для уравнения $F(x, y, y') = 0$ формулируется так: найти $y(x)$, при условиях:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 , \\ y'(x_0) = p_0 , \\ F(x_0, y_0, p_0) = 0 . \end{cases} \quad (4.6.2)$$

При этом тройка чисел $\| x_0 \ y_0 \ p_0 \|^T \in \Omega \subseteq E^3$ называется *начальными условиями задачи Коши*.

Условия однозначной разрешимости задачи Коши (1.5.1)–(4.6.2) дает

Теорема 4.6.1 Пусть функции $F(x, y, d)$ и $\frac{\partial F}{\partial d}$ непрерывны в области G и пусть $\frac{\partial F}{\partial d} \Big|_{(x_0, y_0, d_0)} \neq 0$, тогда найдется $\delta > 0$ такое, что решение задачи Коши (4.6.1)–(4.6.2) существует и единственно на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Рассмотрим теперь случай, когда условия теоремы 4.6.1 не выполняются.

Аналитически для существования особых решений необходимо нарушение условий теоремы 4.6.1, которое может быть сформулировано в виде системы уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, d) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial d}(x, y, d) = 0. \end{cases} \quad (4.6.4)$$

Если из этой системы исключить d , то переменные x и y будут, вообще говоря, связаны некоторым соотношением вида $D(x, y) = 0$.

Определение
4.6.2

Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $D(x, y) = 0$, называется *дискриминантной кривой* уравнения (4.6.1).

Проиллюстрируем это определение следующими задачами.

Задача 4.6.1a Найти дискриминантные кривые и особые решения уравнений.

Пусть $y'^2 = y$. Решив систему (4.6.4)

$$\begin{cases} d^2 - y = 0, \\ 2d = 0 \end{cases}$$

получим дискриминантную кривую вида $y = 0$. Это – очевидно решение.

При этом исходное уравнение также имеет решения вида $y = \left(\frac{x}{2} + C\right)^2$. Нетрудно убедиться, что

$y = 0$ – особое решение.

(См. рис. 4.5.a)

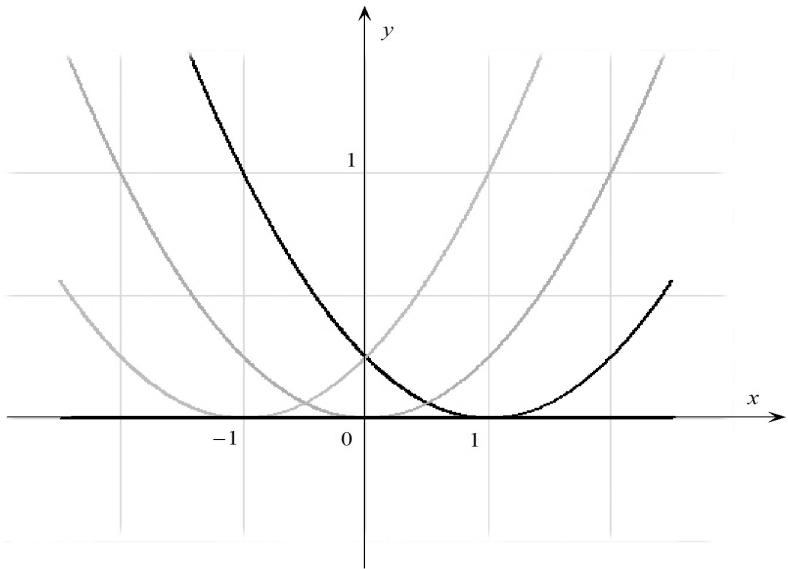


Рис. 2. Интегральные кривые задачи 4.6.1 (а)

Задача
4.6.1b

Найти дискриминантные кривые и особые решения уравнений.

Пусть $y'^2 = x$. Из системы (4.6.4) $\begin{cases} d^2 - x = 0, \\ 2d = 0 \end{cases}$ находим, что дискриминантная кривая есть $x = 0$.

Данное уравнение имеет решения $y = \pm \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$, однако дискриминантная кривая $x = 0$ – не решение уравнения, а геометрическое место *точек возврата* его интегральных кривых.

(См. рис. 4.5.b)

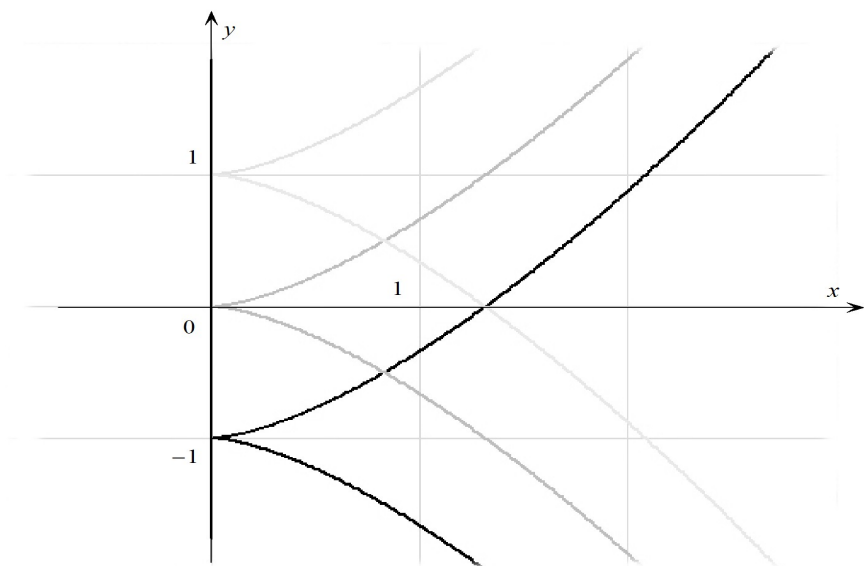


Рис. 3. Интегральные кривые задачи 4.6.1 (b)

Задача
4.6.1с

Найти дискриминантные кривые и особые решения уравнений.

Пусть $y'^2 - 4y^3(1 - y) = 0$. Система (4.6.4) в этом случае такова

$$\begin{cases} d^2 - 4y^3(1 - y) = 0, \\ 2d = 0. \end{cases}$$

Значит, дискриминантная кривая задается уравнением $y^3(1 - y) = 0$ и состоит из двух ветвей: $y = 0$ и $y = 1$. Легко видеть, что обе они являются решениями. Проверьте самостоятельно, что исходное уравнение также имеет решения

$$y = \frac{1}{1 + (x - C)^2}.$$

Заметим, что при этом на $y = 1$ единственность нарушается, а на $y = 0$ – нет. Значит, $y = 0$ – неособое решение. Наконец, поскольку $y = 1$ есть касательная к нелинейным интегральным кривым, делаем заключение, что $y = 1$ – особое решение. (См. рис. 4.5.с)

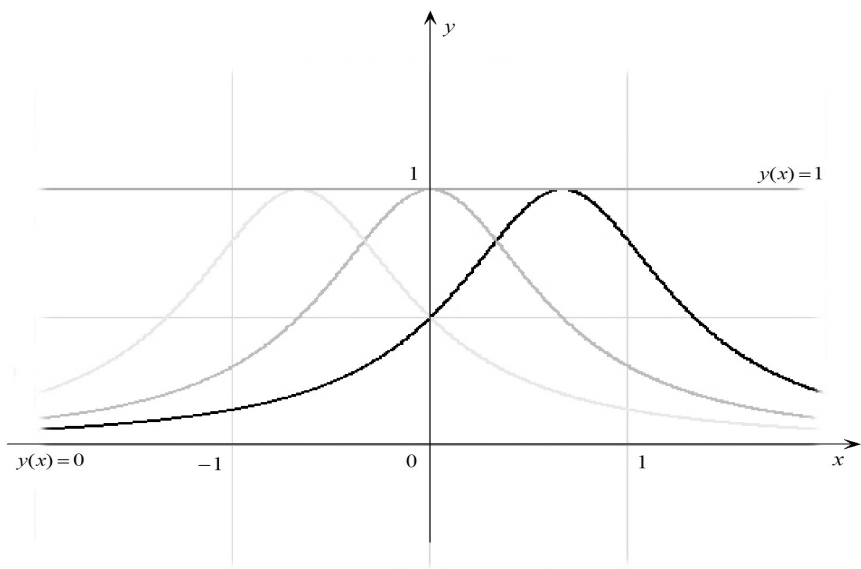


Рис. 4. Интегральные кривые задачи 4.6.1 (с)

В общем случае, для выделения особого решения уравнения (4.6.1) следует:

- 1°. Найти общее решение уравнения (4.6.1).
- 2°. Найти дискриминантные кривые уравнения (4.6.1), которые являются частными решениями этого уравнения.
- 3°. Проверить выполнение определения особого решения для дискриминантных кривых, являющихся частными решениями уравнения (4.6.1).

Более конкретно, последовательность шагов исследования в п. 3° следующая. Пусть $y(x, C) \forall x \in [a, b]$ есть однопараметрическое множество частных решений уравнения (4.6.1), а $y^+(x)$ – частное решение этого уравнение, которое подозревается в том, что оно особое. Решение $y^+(x)$ будет особым, если $\forall x \in [a, b]$ у *переопределенной* системы

$$\begin{cases} y(x, C) &= y^+(x), \\ \frac{\partial y(x, C)}{\partial x} &= \frac{d y^+(x)}{d x} \end{cases} \quad (4.6.5)$$

найдется хотя бы одно решение $C = C(x)$.