Определение 0.1.1.	*Дифференциальным уравнением* будем называть соотношение, имеющее вид *равенства двух функций*, каждая часть которого может содержать независимые переменные, искомую функцию и ее производные.

Определение 0.1.2	Если искомая зависимость, входящая в запись дифференциального уравнения, есть функция *одной* независимой переменной, то такое уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.* Если же искомая функция зависит от *нескольких* независимых переменных, то уравнение называется *уравнением в частных производных.*

Пусть искомая функция $y(x)$ зависит от одной переменной x, тогда дифференциальное уравнение, связывающее эту функцию с ее производными, принято записывать в виде

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,, \tag{0.1.3}$$

где F – известная непрерывная функция от $n+2$ переменных.

Определение 0.1.3	*Порядком дифференциального уравнения* называется порядок старшей производной от неизвестной функции $y(x)$.

Определение 0.1.4	Функция $y(x)$ называется *частным решением* дифференциального уравнения (0.1.3), если — функция $y(x)$ имеет в своей области определения X непрерывные производные до n-го порядка включительно; – область определения и область значений функции $y(x)$ *согласуются* с множеством Ω – областью определения функции $F\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}\right)$, то есть $\| \, x \;\; y(x) \;\; y'(x) \;\; \ldots \;\; y^{(n)}(x) \, \|^{\mathrm{T}} \in \Omega \qquad \forall x \in X \, ;$ – уравнение (0.1.3) превращается подстановкой $y(x)$ в *верное равенство.* Множество *всех* частных решений дифференциального уравнения называется его *общим решением.*

При этом следует иметь в виду, что общее решение дифференциального уравнения лишь в ряде конкретных случаев может быть представлено как элементарная функция, зависящая от каких-то параметров.

Также достаточно часто в процессе исследования оказывается необходимым найти лишь частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям.

Например, задача отыскания частного решения дифференциального уравнения, которое, возможно, как и некоторые его производные, имеют в точке x_0 заранее заданные значения, называется *задачей Коши.*

Отметим также, что задача отыскания частного решения, удовлетворяющего условиям, задаваемым для нескольких (отличных друг от друга) значений независимой переменной, носит название *краевой задачи.*

Метод решения задач типа задачи Коши, основанный на выделении нужного частного решения из общего, как правило, не работает.

Поэтому полезными для практики оказываются методы исследования частных решений дифференциальных уравнений, позволяющие делать заключения об их особенностях, таких как: , единственность, непрерывность, дифференцируемость и т.п.

Важность этих методов обусловлена:

во-первых тем, что для подавляющего большинства классов дифференциальных уравнений получение аналитической записи решений затруднено или просто невозможно. Использование же численных алгоритмов интегрирования корректно лишь в тех случаях, когда существование и единственность искомого решения обоснованы;

во-вторых, при построении математических моделей неизбежно использование различных параметров, констант и других количественных характеристик, значения которых могут иметь некоторую погрешность. Поэтому при использовании в математической модели дифференциальных уравнений необходимо быть уверенным в том, что малые изменения значений параметров приводят к малым вариациям решений.

Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Изучение методов решения дифференциальных уравнений начнем с уравнений вида

$$y' = f(x, y), \tag{1.1.1}$$

являющегося частным случаем уравнения (0.1.3) при $n = 1$.

Предположим, что функция двух переменных $f(x, y)$ задана в двухмерном евклидовом пространстве E^2 с элементами, имеющими в стандартном ортонормированном базисе координатные представления $\| \, x \;\; y \, \|^{\mathrm{T}}$. Тогда можно дать

Определение 1.1.1	Функция $y(x)$ называется *частным решением* дифференциального уравнения (1.1.1), если – $f(x, y)$ непрерывна в своей области определения $\Omega \subseteq E^2$, – $y = y(x)$ непрерывно дифференцируемая в своей области определения $X \subseteq R$ функция, причем $\| \, x \;\; y(x) \, \|^{\mathrm{T}} \in \Omega \quad \forall x \in X$, – $y'(x) = f\,(x, y(x)) \quad \forall x \in X$.

Поскольку каждой упорядоченной паре чисел $\{x, y\}$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие точку координатной плоскости с координатным представлением $\| \, x \;\; y \, \|^{\mathrm{T}}$, то график функции $y = y(x)$ можно рассматривать как геометрическое представление частного решения уравнения (1.1.1). Этот график обычно называют *интегральной кривой*.

Рассмотрим теперь альтернативные способы записи уравнения (1.1.1). Во-первых, это уравнение можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \ , \tag{1.1.2}$$

в котором производная функция $y'(x)$ выражена в виде дроби – отношения дифференциалов переменных y и x.

Из курса математического анализа известно, что формульная запись функции может отличаться от стандартного вида – явной зависимости $y = y(x)$. Например, функция $y = y(x)$, являющаяся частным решением уравнения (1.1.1), может быть представлена обратной $x = x(y)$, если эта обратная функция существует. В этом случае $x = x(y)$ есть частное решение уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} \ , \tag{1.1.3}$$

интегрирование которого может оказаться более простой задачей, чем решение уравнения (1.1.1).

Другой возможный способ описания частного решения уравнения (1.1.1) — использование *параметрического способа* задания функции. Пусть, например:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in \Theta \ .$$

Согласно соответствующей теореме из курса математического анализа, производная $y'_x = y'_t / x'_t$, а уравнение (1.1.1) будет иметь вид

$$y'_t = f\big(x(t), y(t)\big) \cdot x'_t \ .$$

Использование альтернативных способов представления решений в ряде случаев может существенно упростить процедуру интегрирования уравнения (1.1.1).

Вместе с тем может оказаться так, что ни один из способов аналитического описания частных решений оказывается применимым.

Например, для уравнения $y' = e^{-x^2}$ каждое частное решение не выражается через элементарные функции, а представимо в виде

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} e^{-u^2}\, du\ ,$$

то есть выражается через определенный интеграл с переменным верхним пределом.

Заметим, что использование для записи решения дифференциального уравнения сочетания конечного числа операций над элементарными функциями и их суперпозиций с выражениями, содержащими определенные интегралы с переменным верхним пределом, принято называть *интегрированием в квадратурах.*

При этом отметим, что в общем случае и интегрирование в квадратурах может не давать описания частных решений уравнения (1.1.1). Жозеф Лиувилль показал, например, что уравнение $y' = y^2 + x$ в квадратурах неразрешимо.

Поскольку в общем случае явный вид решения уравнения (1.1.1) найти не удается, то ради получения хотя бы приближенного представления о его свойствах целесообразно попытаться выяснить геометрический смысл этого уравнения и его решений.

Для этого можно поставить в соответствие каждой точке $\| \, x \;\; y \, \|^{\mathrm{T}}$ некоторого множества $\Omega \subseteq E^2$ вектор с координатным представлением $\| \, 1 \;\; f(x,y) \, \|^{\mathrm{T}}$.

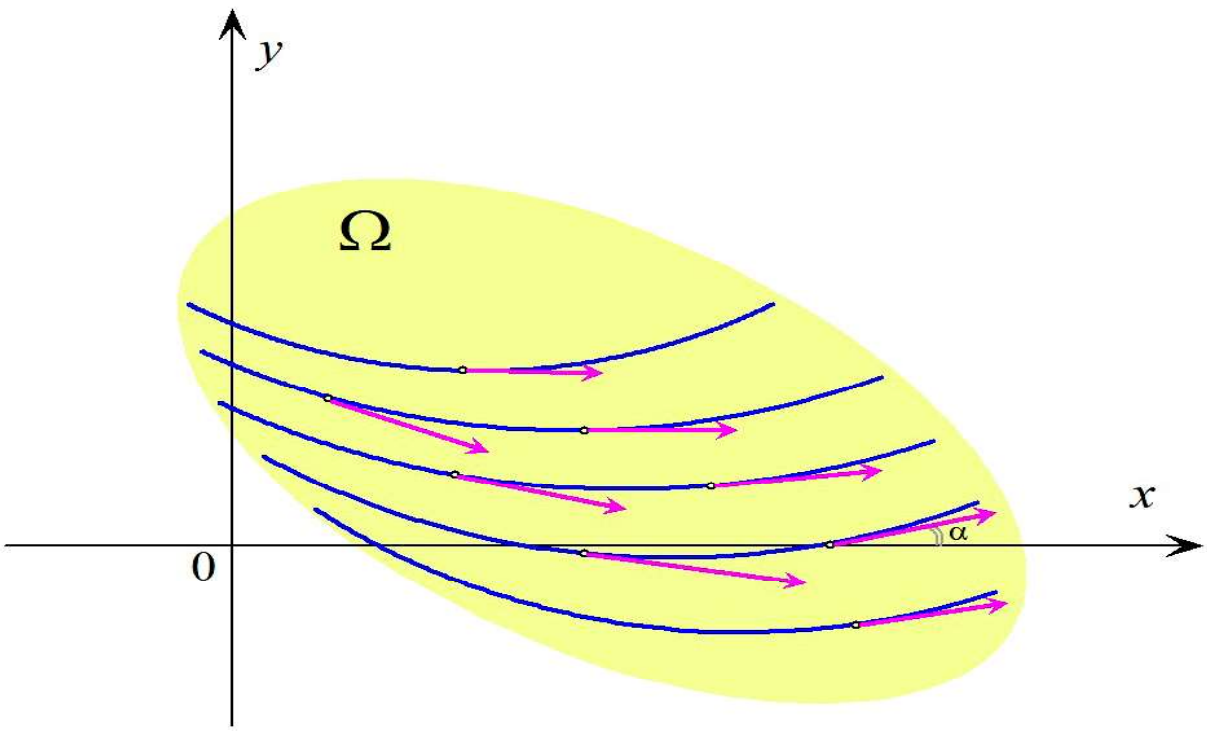

Рис. 1. Поле направлений дифференциального уравнения (1.1.1)

Полученное векторное множество принято называть *полем направлений* уравнения (1.1.1). Его основные геометрические свойства определяет теорема, называемая *теоремой существования и единственности* решения задачи Коши вида

$$\text{найти частное решение уравнения } y' = f(x,y),$$

$$\text{для которого } \; y(x_0) = y_0 \;\text{ с }\; \{x_0, y_0\} \in \Omega\,. \qquad (1.1.4)$$

Теорема 1.1.1 (Коши)

Пусть функции $f(x,y)$ **и** $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ **непрерывны в области** Ω, **а** $X \subseteq R$ **– проекция** Ω **на ось** Ox, **тогда**

— $\forall x_0 \in X \;\exists \Delta > 0$ **такое, что решение задачи Коши (1.1.4) существует** $\forall x \in \mathrm{U}_\Delta(x_0)$,

и

— **если** $y = y_1(x),\; x \in X_1$, **и** $y = y_2(x),\; x \in X_2$, — **два решения задачи Коши (1.1.4), причем** $x_0 \in X_1 \cap X_2$, **то** $y_1(x) = y_2(x)\; \forall x \in X_1 \cap X_2$.

Из определения производной функции в точке следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = f(x,y)$$

(см. рис. 1.1). Поскольку $f(x,y)$ – функция, то интегральные кривые пересекаться не могут, а могут лишь в крайнем случае касаться друг друга. Если же функция $f(x,y)$ достаточно гладкая, чтобы удовлетворить условиям теоремы 1.1.1, то невозможным оказывается и касание.

Свойство интегральных кривых, заключающееся в том, что они не пересекаются и не касаются, можно использовать для построения приближенного эскиза их графиков, поскольку очевидно, что каждая из точек плоскости Oxy, для которой $f(x,y) = k$, где $k = \text{const}$, имеет касательную к интегральной кривой с одним и тем же угловым коэффициентом $k = \text{tg}\alpha$. Л

Линию, каждая точка которой имеет один и тот же угловой коэффициент, называют *изоклиной*.

Графическое представление семейства изоклин на плоскости Oxy позволяет делать заключения о некоторых свойствах интегральных кривых и строить эскизы их графиков, что демонстрирует

Задача 1.1.1 Для уравнения $y' = y + x$ построить эскиз интегральных кривых.

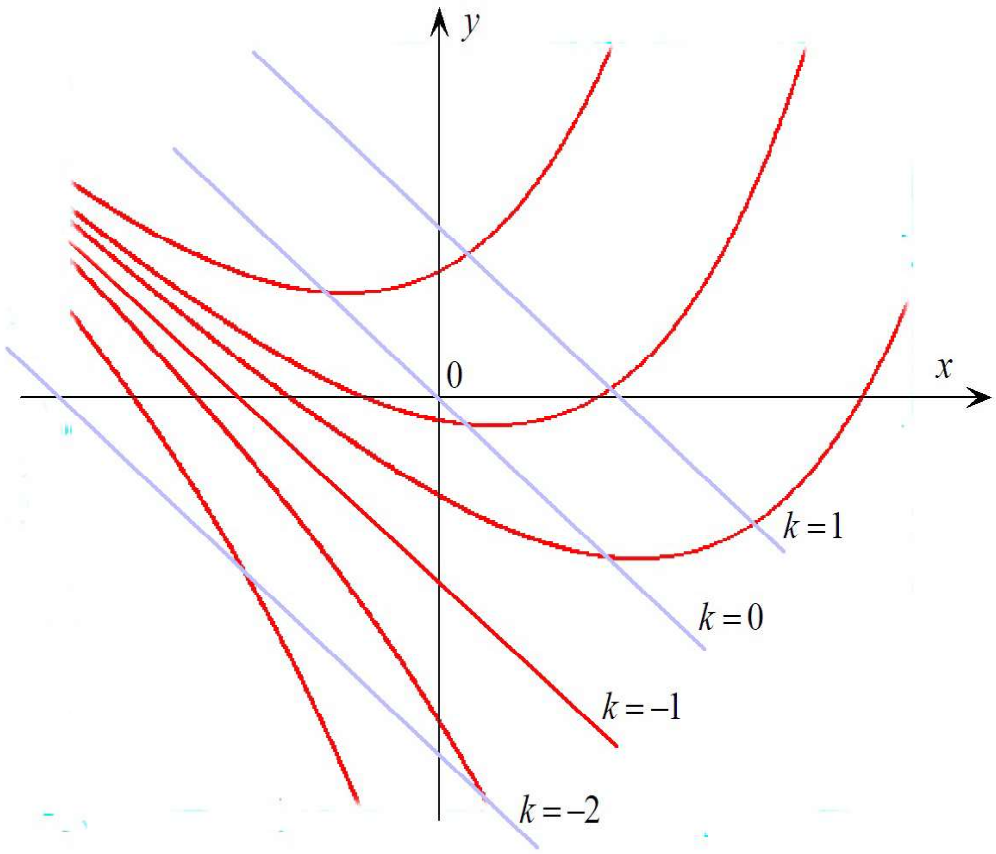

Рис. 2. Эскиз семейства интегральных кривых задачи 1.1.1

Решение

Заметим, что в данной задаче условия теоремы 1.1.1 выполнены, а область Ω есть вся координатная плоскость Oxy. Уравнения изоклин имеют вид $y = -x + k$, следовательно – это семейство параллельных прямых, изображенных голубым цветом на рис. 1.2.

Вполне очевидны следующие свойства интегральных кривых: во-первых, они возрастают в точках, где $k > 0$, и убывают там, где $k < 0$; во-вторых, $y = -x - 1$ – частное решение исходного уравнения.

Если предположить, что функция $y(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то из условия $y' = y+x$ следует

$$y'' = y' + 1 = y + x + 1 \ .$$

То есть интегральные кривые выпуклы вниз в точках, для которых $y + x > -1$ (так как здесь $y'' > 0$), и, соответственно, выпуклы вверх при $y + x < -1$.
При $y+x = 0$ касательные к интегральным кривым горизонтальны, сами же интегральные кривые выпуклы вниз. Следовательно, в этих точках частные решения исходного уравнения имеют минимум.
Принимая во внимание отмеченные свойства интегральных кривых, строим эскизы их графиков, которые показаны на рис. 1.2 красным цветом.

Решение получено.

В завершение обсуждения геометрической интерпретации уравнения (1.1.1) отметим следующее важное обстоятельство. Теорема Коши устанавливает существование и единственность решения задачи Коши локально лишь в некоторой, достаточно малой окрестности точки x_0. Однако это решение может существовать и быть единственным на существенно более протяженном промежутке (содержащем x_0), чем $\mathrm{U}_\Delta(x_0)$.

Примером может служить случай, когда

$$y = y_1(x),\ x \in X_1, \quad \text{и} \quad y = y_2(x),\ x \in X_2,$$

суть два решения задачи Коши (1.1.4) с $x_0 \in X_1 \cap X_2$, но $X_1 \neq X_2$.

По теореме Коши решение этой задачи имеет вид

$$y = y_1(x), \quad x \in X_1 \setminus (X_1 \cap X_2).$$

Аналогично в $X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)$ решением будет $y = y_2(x)$. Таким образом, функция

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x),\ x \in X_1 \setminus (X_1 \cap X_2), \\ y_1(x) = y_2(x),\ \in x \in X_1 \cap X_2, \\ y_2(x),\ x \in X_2 \setminus (X_1 \cap X_2) \end{cases} \qquad \forall x \in X_1 \cup X_2 \qquad (1.1.5)$$

есть решение задачи Коши на более широком, чем X_1 или X_2, промежутке.

В этом случае принято говорить, что функция (1.1.5) есть *продолжение решения задачи Коши* (1.1.4) с промежутка X_1 на множество $X_1 \cup X_2$. Аналогично эта же функция является продолжением с X_2 на $X_1 \cup X_2$. Само решение $y_1(x) = y_2(x)$ называется *продолжимым.*

Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения класса (1.1.1), имеющие вид

$$y' = f(x)g(y) \ , \tag{1.2.1}$$

где $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны на промежутках X и Y соответственно, принято называть *уравнениями с разделяющимися переменными.* Эти уравнения всегда интегрируются в квадратурах.

Сначала выделим очевидный случай: если существуют, принадлежащие промежутку Y, числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ такие, что $g(\alpha_i) = 0$, то функции $y(x) \equiv \alpha_i \forall i = [1, k]$ суть частные решения уравнения (1.2.1).

Если же $y \neq \alpha_i$ (то есть $g(y) \neq 0$), то уравнение (1.2.1) равносильно уравнению

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \quad \text{или} \quad G'_x(y(x)) = F'(x) \ ,$$

где $G'_x(y(x)) = \dfrac{y'(x)}{g(y(x))}$, а $F'(x) = f(x)$, то есть $G(y)$ и $F(x)$ суть *некоторые первообразные* функции $\dfrac{1}{g(y)}$ и $f(x)$ соответственно.

Известно, что если две дифференцируемые функции на некотором промежутке имеют равные производные, то эти функции могут отличаться только на константу. Поэтому справедливо равенство $G(y(x)) = F(x) + C \ \ \forall C$ или же просто

$$G(y) = F(x) + C \ , \tag{1.2.2}$$

которое определяет другое семейство частных решений уравнения (1.2.1) и изображающих их на плоскости Oxy интегральных кривых.

Рассмотрим теперь для уравнения $y' = f(x)g(y)$, задачу Коши следующего вида:

найти частное решение $y = y(x)$ уравнения (1.2.1),
для которого $y_0 = f(x_0)$, где $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$.

Во-первых, если $g(y_0) = 0$, то уравнение $y' = f(x)g(y)$ имеет очевидное решение $y(x) \equiv y_0$.

Если же $g(y_0) \neq 0$ при $y_0 \in \bar{Y}$, то решение задачи Коши, в силу (1.2.2), будет иметь вид

$$G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0) \ .$$

Во-вторых, возможны случаи, когда решение задачи Коши не единственно, что иллюстрирует

Задача 1.2.1 Для уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ (1.2.3)
решить

задачи Коши: $a)\quad y(1) = 1\,,\qquad b)\quad y(0) = 0\,,$
краевую задачу: $c)\quad \left\{ y(-3) = -1\,,\quad y(1) = 1 \right\}.$

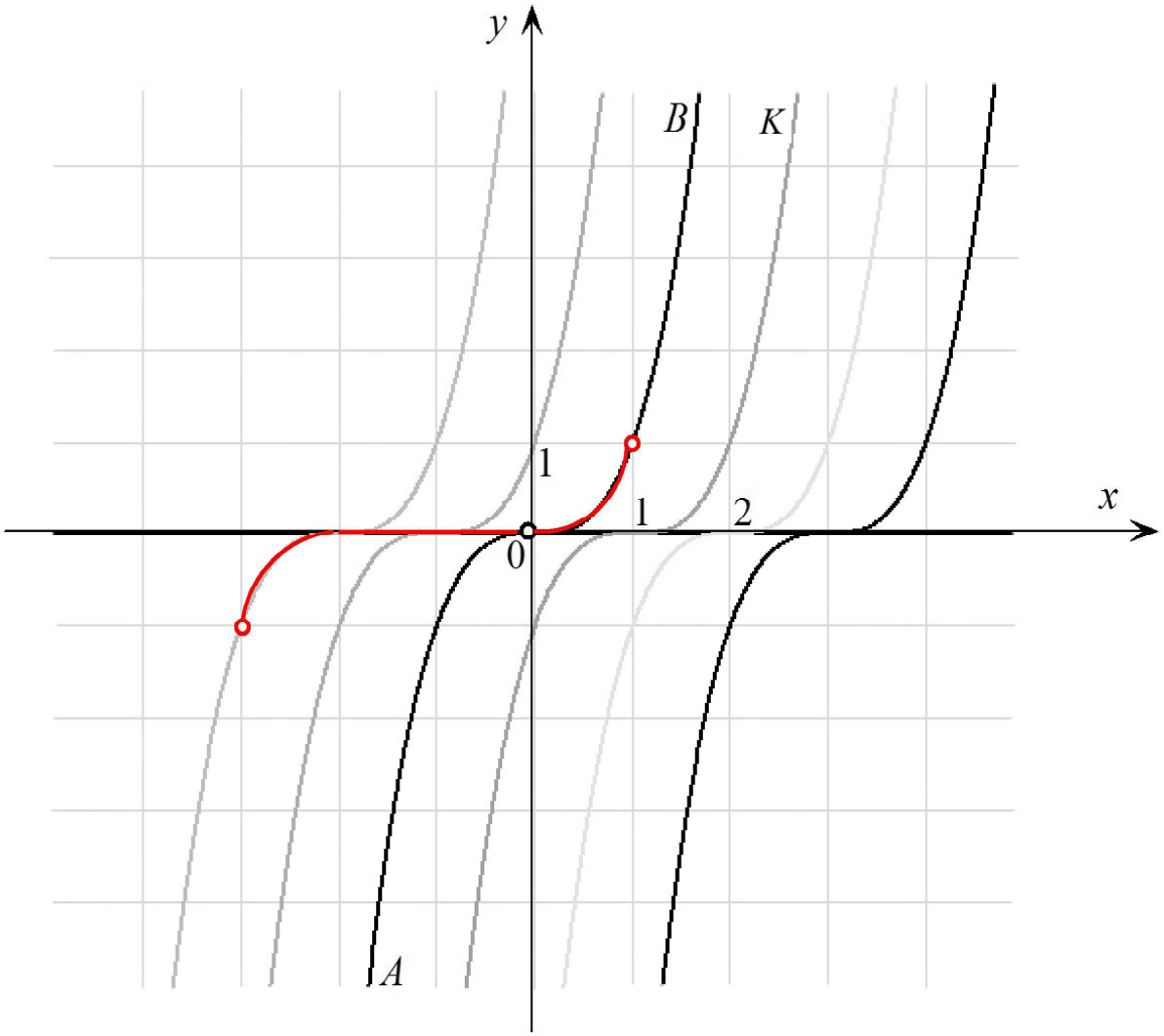

Рис. 3. Интегральные кривые для уравнения в задаче 1.2.1

Таким образом, общее решение уравнения (1.2.3) есть совокупность частного решения $y(x) = 0$, семейства функций $y = (x + C)^3$, $\forall C \in R$ и всевозможных непрерывно дифференцируемых *функций*, составленных из подходящих фрагментов функций $y(x) = 0$ и $y = (x + C)^3$.

Например, интегральной кривой будет линия, проходящая через точки $A - (0; 0) - - (1; 0) - K$, а линия $B - (0; 0) - - (2; 0) - K$ интегральной кривой не является, поскольку она не есть график функции (нет однозначности в зависимости y от x).

Заметим, что в задаче 1.2.1 множество Ω – это вся координатная плоскость, в любой точке которой функция $g(y) = \sqrt[3]{y^2}$ непрерывна, в то время как частная производная $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ будет непрерывной лишь при $\forall y \neq 0$.

Однородные уравнения

Определение 1.2.1	Дифференциальное уравнение первого порядка (1.1.1), имеющее вид (или сводящееся к виду): $$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) , \qquad (1.2.4)$$ называется *уравнением однородным по переменным x и y* .

Однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи перехода от неизвестной функции $y(x)$ к новой неизвестной $u(x)$ по формуле $y(x) = xu(x)$. При такой замене $y' = xu' + u$, и уравнение (1.2.4) принимает вид $xu' + u = f(u)$, в котором переменные x и u разделяются.

Задача 1.2.2 Показать, что уравнение

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad \text{с} \qquad \det\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix} \neq 0$$

сводится к однородному при замене $x = u+x_0$ и $y = v+y_0$, где

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Как можно решить данное уравнение, если

$$\det\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix} = 0 \ ?$$

Линейные уравнения первого порядка

Определение 1.3.1	Дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее вид $$y' + a(x)y = b(x)\ , \qquad (1.3.1)$$ где $a(x)$ и $b(x)$ — известные непрерывные при $x \in X$ функции, называется *линейным уравнением первого порядка.*

Другими словами, линейное дифференциальное уравнение первого порядка это уравнение, в которое $y'(x)$ и $y(x)$ входят линейно. Функции же $a(x)$ и $b(x)$, вообще говоря, могут быть и нелинейными.

Как и в курсе линейной алгебры, будем называть уравнение (1.3.1) *однородным*, если $b(x) \equiv 0$, иначе – *неоднородным.* При этом уравнение (1.3.1) можно записать в виде $y' = -a(x)y + b(x)$, откуда следует, что для него множество Ω есть полоса $\{\, x \in X,\ \forall y \,\}$, в которой выполнены условия теоремы Коши.

Отметим также: общность свойств уравнений вида (1.3.1) и алгебраических систем линейных уравнений существенно более глубокая. Этот вопрос будет нами детально рассмотрен в гл. 2.

Здесь же отметим, что справедливы, например, утверждения:

– *линейная комбинация частных решений однородного уравнения есть частное решение этого однородного уравнения;*

– *сумма частного решения однородного уравнения и частного решения неоднородного есть частное решение неоднородного;*

– *разность двух частных решений неоднородного уравнения есть частное решение однородного;*

– *общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного и какого-нибудь частного решения неоднородного.*

Теперь убедимся, что линейное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, всегда интегрируется в квадратурах.

Сначала найдем решение однородного уравнения: $y' = -a(x)y$.

Оно имеет очевидное частное решение $y(x) = 0$, а в случае $y(x) \neq 0$ равносильно уравнению $\dfrac{dy}{y} = -a(x)dx$, решение которого имеет вид: $\ln|y| = -\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\,du + \ln\tilde{C}$, где $\tilde{C} > 0$, а x_0 – любое фиксированное число из промежутка X. Объединение этих двух случаев дает формулу частных решений однородного уравнения:

$$y(x) = C\varphi(x), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\,du} \quad \forall\, C. \tag{1.3.2}$$

Теорема 1.3.1 **Формула (1.3.2) описывает** *общее* **решение однородного уравнения (1.3.1).**

Доказательство

Мы убедились, что при любом фиксированном C функция $C\varphi(x)$ есть частное решение однородного уравнения. Покажем теперь, что любое частное решение этого уравнения представимо в виде $C\varphi(x)$.
Пусть $z(x)$ — некоторое частное решение однородного уравнения (1.3.1). Поскольку $\varphi(x_0) = 1$, где x_0 – некоторая точка, принадлежащая X, то функция $w(x) = z(x_0)\varphi(x)$ будет иметь в x_0 значение $z(x_0)$.
То есть функции $z(x)$ и $w(x)$ в x_0 имеют равные значения и потому являются решением задачи Коши для однородного уравнения с начальным условием $\{x_0;\ z(x_0)\}$, которое согласно теореме Коши существует и единственно на промежутке X. Откуда следует, что

$$z(x) = z(x_0)\varphi(x) = C_0\varphi(x) \quad \forall x \in X,$$

где $C_0 = z(x_0)$.

Теорема доказана.

Затем будем искать частное решение неоднородного уравнения (1.3.1), следуя рекомендации Жозефа Лагранжа, методом *вариации постоянной*, а именно в виде $\bar{y}(x) = C(x)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – частное решение однородного уравнения, задаваемое формулой (1.3.2) при $C = 1$.

Подставляя $\bar{y}(x) = C(x)\varphi(x)$ в исходное уравнение (1.3.1), получаем

$$C'(x)\varphi(x) + C(x)\varphi'(x) = -a(x)C(x)\varphi(x) + b(x) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad C'(x)\varphi(x) + C(x)\Big(\varphi'(x) + a(x)\varphi(x)\Big) = b(x)\ .$$

Откуда следует $C'(x)\varphi(x) = b(x)$, поскольку $\varphi(x)$ – частное решение однородного уравнения, а значит $\varphi'(x) + a(x)\varphi(x) = 0$.

Теперь находим $C(x) = \int\limits_{x_1}^{x} \dfrac{b(v)}{\varphi(v)}\, dv$, где $x_1 \in X$, а затем и

$$\bar{y}(x) = C(x)\varphi(x) = \varphi(x) \int\limits_{x_1}^{x} \frac{b(v)}{\varphi(v)}\, dv\ .$$

Наконец, записываем общее решение неоднородного уравнения (1.3.1) как

$$y(x) = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\, du} + \varphi(x) \int\limits_{x_1}^{x} \frac{b(v)}{\varphi(v)}\, dv$$

или

$$y(x) = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\, du} + e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\, du} \cdot \int\limits_{x_1}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{v} a(t)\, dt} b(v)\, dv\ . \qquad (1.3.3)$$

Данное выражение вряд ли стоит учить наизусть, достаточно помнить лишь правило:

> *общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения и какого-нибудь частного решения неоднородного,*

поскольку нами было показано, что общее решение однородного уравнения всегда находится в квадратурах разделением переменных, а частное решение неоднородного можно получить, например, методом Лагранжа (вариации постоянной).

При этом формула (1.3.3) заслуживает некоторого пояснения. Дело в том, что это выражение содержит три произвольные константы — C, x_0 и x_1, между которыми имеется существенная разница: C есть вещественный параметр, изменение значения которого в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ позволяет получить *все* частные решения уравнения (1.3.1). Значения же величин x_0 и x_1 произвольные (из промежутка X), но фиксированные. Их изменение допустимо, оно поменяет лишь вид формулы (1.3.3), но не изменит *общего решения* уравнения (1.3.1).

Задача 1.3.1

Решить уравнение

$$y' + a(x)y = b(x)y^p \ , \tag{1.3.4}$$

называемое *уравнением Бернулли.*

Решение

Заметим, что при $p = 0$ или при $p = 1$ уравнение (1.3.4) уже само по себе есть линейное, первого порядка. Кроме того, при $p > 0$ оно очевидно имеет тривиальное решение $y(x) = 0$.

Пусть $p \neq 0$, $p \neq 1$ и $y(x) \neq 0$, тогда исходное уравнение почленным делением на y^p сводится к равносильному уравнению

$$\frac{y'}{y^p} + a(x)\frac{1}{y^{p-1}} = b(x) \ .$$

Вводя новую неизвестную функцию $u(x) = y^{1-p}(x)$, в силу $u' = \dfrac{(1-p)y'}{y^p}$, получаем

$$u' + (1-p)a(x)u = (1-p)b(x)$$

уравнение первого порядка, линейное относительно функции $u(x)$.

Наконец отметим, что уравнение Бернулли также можно решать методом вариации постоянной. С практической точки зрения этот подход может оказаться даже более эффективным, чем метод замены переменной.

Решение получено.