Вопрос 29

Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Формула Лиувилля-Остроградского.

Определение 29-1	Уравнение вида $$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\dots$$ $$\dots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=b(x) \qquad a_n(x)\neq 0\,, \qquad (29-1)$$ где функции $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\dots$ $a_n(x)$ и $b(x)$ известные, комплекснозначные, непрерывные $\forall x\in X\subseteq R$, а искомая функция $y(x)$ n раз непрерывно дифференцируема $\forall x\in X$, называется *линейным дифференциальным уравнением $n-$го порядка.*

Это уравнение называется линейным, поскольку неизвестная функция и ее производные входят в (29-1) нелинейно, хотя функции $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\dots$ $a_n(x)$ и $b(x)$, вообще говоря, нелинейны.

Рассмотрим вначале случай линейного однородного уравнения с переменными коэффициентами

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots$$
$$\dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0\,, \qquad (29-2)$$

Напомним, что частные решения $y_{(1)}(x)$, $y_{(2)}(x)$, ... , $y_{(k)}(x)$ уравнения (29-2) называются линейно зависимыми, если существуют неравные одновременно нулю числа λ_1, λ_2, ... , λ_k такие, что

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_{(i)}(x) = 0 \qquad \forall x \in X\,.$$

Определение 29-2	*Фундаментальным набором решений* уравнения (29-2) называется совокупность любых n его линейно независимых частных решений.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 29-1 **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два частных решения однородного уравнения (29-2), то $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ – также частное решение этого уравнения $\forall\, C_1,\ C_2$.**

Лемма 29-2 **Если $y_0(x)$ – частное решение однородного (29-2), а $y^*(x)$ – частное решение неоднородного уравнения (29-1), то $y_0(x) + y^*(x)$ есть частное решение неоднородного уравнения (29-1).**

Лемма 29-3 **Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два частных решения неоднородного уравнения (29-1), то $y_1(x) - y_2(x)$ есть частное решение однородного уравнения (29-2).**

Теорема 29-1 **Для множества частных решений** *однородного* **уравнения (29-2) справедливы утверждения:**

1°. Фундаментальные наборы решений этого уравнения существуют.

2°. Общее решение уравнения (29-2) есть совокупность всевозможных линейных комбинаций функций из фундаментального набора решений.

3°. Множество всех частных решений однородного уравнения (29-2) является линейным пространством размерностью n, базисом в котором может служить любой фундаментальный набор решений.

Теорема 29-2 **Общее решение неоднородного уравнения (29-1) есть сумма общего решения однородного (29-2) и некоторого частного решения неоднородного уравнения (29-1).**

Заметим, что определения линейной зависимости векторов и вектор-функций различны.

Например, столбцы $\left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|$ и $\left\| \begin{matrix} x \\ x \end{matrix} \right\|$ можно использовать для описания как линейно зависимых векторов, так и линейно независимых вектор-функций, поскольку для каждого конкретного x найдутся, не равные нулю одновременно, λ_1 и λ_2 такие, что

$$\lambda_1 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{matrix} x \\ x \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|,$$

а одновременно для всех x — нет.

Удобным инструментом исследования линейной зависимости функций может служить

Определение 29-3

Вронскианом набора $n-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций

$$y_{(1)}(x),\, y_{(2)}(x),\, \ldots\,,\, y_{(n)}(x)$$

называется

$$\det \left\| \begin{matrix} y_{(1)}(x) & y_{(2)}(x) & \ldots & y_{(n)}(x) \\ \acute{y}_{(1)}(x) & \acute{y}_{(2)}(x) & \ldots & \acute{y}_{(n)}(t) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y_{(1)}^{(n-1)}(x) & y_{(2)}^{(n-1)}(x) & \ldots & y_{(n)}^{(n-1)}(x) \end{matrix} \right\|,$$

обозначаемый, как и раньше, $W(x)$.

Теорема 29-3

Пусть функции $y_{(1)}(x), y_{(2)}(x), \ldots, y_{(n)}(x)$ определены и $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы $\forall x \in \Omega$ и $W(x)$ – их вронскиан. Тогда

1°. Если $y_{(1)}(x), y_{(2)}(x), \ldots, y_{(n)}(x)$ линейно зависимы на Ω, то $W(x) \equiv 0$ на Ω.

2°. Если вронскиан $W(x) \not\equiv 0$ на Ω, то функции $y_{(1)}(x), y_{(2)}(x), \ldots, y_{(n)}(x)$ линейно независимы на Ω.

3°. Пусть $y_{(1)}(x), y_{(2)}(x), \ldots, y_{(n)}(x)$ суть частные решения однородного уравнения (29-2). Они линейно зависимы тогда и только тогда, когда и их вронскиан тождественно равен нулю, то есть $W(x) \equiv 0$ на Ω. Для их линейной независимости необходимо и достаточно, чтобы $\forall x_0 \in \Omega : W(x_0) \neq 0$.

4°. Если $y_{(1)}(x), y_{(2)}(x), \ldots, y_{(n)}(x)$ суть частные решения однородного уравнения (29-2), то $\forall\ x_0, x \in \Omega$ справедлива формула Лиувилля–Остроградского:

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(u)}{a_n(u)}\, du \right).$$

К теореме 29-3 сделаем два замечания.

Во-первых, утверждения, обратные п.п. 1° и 2° теоремы 29-3, будут верными не для *произвольных* $y_{(1)}(x), y_{(2)}(x), \ldots, y_{(n)}(x)$, а лишь для набора функций, которые являются *частными решениями* однородного уравнения (29-2).

Во-вторых, справедливость формулы Лиувилля-Остроградского следует из соответствующей теоремы для системы линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Рассмотрим теперь случай неоднородного уравнения (29-1). Структуру его общего решения дает

Теорема 29-4 **Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (29-1) есть сумма** *любого частного* **решения этого неоднородного уравнения и** *общего* **решения однородного уравнения (29-2).**

Частное решение неоднородного уравнения (29-1) может быть получено в квадратурах для непрерывной функции $b(x)$ методом *вариации постоянных*, суть которого описывает

Теорема 29-5 **Пусть частные решения однородного уравнения (29-2)** $\{y_{(1)}(x),\, y_{(2)}(x),\, \dots\, ,\, y_{(n)}(x)\}$ **образуют фундаментальный набор, тогда неоднородное уравнение (29-11) имеет частное решение вида**

$$y^*(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_{(k)}(x)\,,$$

где непрерывно дифференцируемые функции $C_k(x),\ k = [1, n]$ **определяются как квадратуры решений системы линейных уравнений:**

$$\left\| \begin{array}{cccc} y_{(1)}(x) & y_{(2)}(x) & \dots & y_{(n)}(x) \\ \acute{y}_{(1)}(x) & \acute{y}_{(2)}(x) & \dots & \acute{y}_{(n)}(x) \\ \ddot{y}_{(1)}(x) & \ddot{y}_{(2)}(x) & \dots & \ddot{y}_{(n)}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n-1)}_{(1)}(x) & y^{(n-1)}_{(2)}(x) & \dots & y^{(n-1)}_{(n)}(x) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \acute{C}_1(x) \\ \acute{C}_2(x) \\ \acute{C}_3(x) \\ \dots \\ \acute{C}_n(x) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dfrac{b(x)}{a_n(x)} \end{array} \right\| .$$