Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Для описания поведения решений автономной системы

$$\dot{x} = F(x)\,,\ \ x \in \Omega \subseteq E^n\,, \tag{6.4.1}$$

где $F(x)$ непрерывно дифференцируемая, вещественная вектор-функция, а $x(t)$ $t \in T$ – решение системы (6.4.1) на промежутке T, в окрестности неособых точек (или особых точек, где линеаризация не применима) оказываются полезными функции, носящие название первых интегралов.

Определение 6.4.1	Непрерывно дифференцируемая в Ω функция $u(x)$ называется *первым интегралом* системы (6.4.1), если $u(x(t)) \equiv \text{const}\ \ \forall t \in T$ для *каждого* решения $x(t)$ этой системы.

Тривиальным примером первого интеграла может служить функция $u(x) \equiv const$. Условия же существования нетривиальных первых интегралов формулируются с помощью понятий *производной в силу системы* (см. определение (6.2.4)) и *функциональной независимости* первых интегралов.

`Определение 6.4.2`	Первые интегралы $\left\{u_{(k)}(x)\,,\ k=[1,s]\,,\ \ s \le n\right\}$ называются *функционально независимыми* в точке $a \in \Omega$, если ранг матрицы Якоби равен s, то есть $$\operatorname{rg}\left(\left\|\frac{\partial u_{(k)}}{\partial x_j}\right\|\Bigg|_{x=a}\right)=s\,,\quad \text{где } k=[1,s]\,,\ \ j=[1,n]\,.$$

Согласно этому определению, функциональная зависимость, исходя из известной теоремы о неявных функциях, означает возможность функционально выразить (локально) один первый интеграл через другой.

Следует также отметить различие понятий функциональной зависимости и линейной зависимости. Из линейной зависимости следует функциональная, но не наоборот. Пример: функционально зависимые функции $u_{(1)}(x_1,x_2)=x_1+x_2$ и $u_{(2)}(x_1,x_2)=(x_1+x_2)^2$ в E^2 линейно независимы.

Критерий существования первого интеграла описывает

Теорема 6.4.1 **Для того чтобы непрерывно дифференцируемая в области Ω функция $u(x)$ являлась первым интегралом системы (6.4.1), необходимо и достаточно, чтобы $\grave{u}(x)$ – производная от $u(x)$ в силу системы (6.4.1) – равнялась нулю на каждом решении системы (6.4.1).**

Доказательство.

Пусть $x(t)$ некоторое решение системы (6.4.1). Рассмотрим функцию $v(t) = u(x(t))$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$\dot{v}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \dot{x}_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} F_j(x(t)) = \grave{u}(x(t))\,.$$

Откуда мы имеем для первого интеграла

$$u(x(t)) = \text{const} \quad \Longleftrightarrow \quad \grave{u}(x(t)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{v}(t) = 0 \quad (6.4.2)$$

А по теореме 4.3.1 (Коши) через каждую неособую точку Ω проходит некоторая фазовая траектория системы (6.4.1), на которой выполняются соотношения (6.4.2).

Теорема доказана.

Выясним теперь геометрический смысл первого интеграла. Пусть $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \neq 0$ для некоторого j и пусть C – любое из значений первого интеграла $u(x)$, принимаемых в Ω. Тогда уравнение $u(x) = C$ задает в E^n $(n-1)$-мерную гиперповерхность Γ, на которой целиком лежат фазовые траектории системы (6.4.1).

Действительно, пусть точка a принадлежит поверхности Γ, тогда $u(a) = C$. Поскольку $u(x)$ первый интеграл, то в любой точке фазовой траектории $x(t)$, проходящей через a, будет $u(x(t)) = C$. Значит, вся эта траектория лежит на Γ.

Заметим, что обратное не верно: не любая линия на поверхности уровня есть фазовая траектория.

Если известен первый интеграл $u(x)$, у которого $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \neq 0$ для некоторого j, то система (6.4.1) может быть сведена к системе с меньшим на единицу числом неизвестных функций. Для этого следует x_j выразить при помощи уравнения $u(x) = C$ через остальные неизвестные и подставить это выражение во все (кроме j-го) уравнения исходной системы (6.4.1).

Знание же $n - 1$ функционально независимых первых интегралов позволяет получить решение системы (6.4.1) в квадратурах.

Поскольку любая непрерывно дифференцируемая функция от нескольких первых интегралов системы (6.4.1) очевидно также является ее первым интегралом, то первых интегралов у этой системы бесконечно много.

При этом однако возникает вопрос о том какое число из них может оказаться функционально независимыми.

Ответ на данный вопрос находится при помощи нижеследующих рассуждений.

Система (6.4.1) в неразвернутом матричном виде записывается так:

$$\|\dot{x}\| = \|F(x)\|\,, \quad x \in \Omega \subseteq E^n. \tag{6.4.3}$$

При гладкой обратимой замене переменных $\|x\| = \|g(y)\|$ с матрицей Якоби

$$\|G(y)\| = \left\| \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right\| \quad \forall i, j = [1, n]$$

и якобианом

$$\det \|G(y)\| = \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0 \;\; \forall y \in \Omega^*\,,$$

в области Ω^*, являющейся образом области Ω, автономная система (6.4.3) примет вид

$$\|\dot{y}\| = \|G(y)\|^{-1}\|F(g(y))\|\,, \quad y \in \Omega^* \subseteq E^n. \tag{6.4.4}$$

Система (6.4.4) непосредственно получается из (6.4.3) в силу равенств

$$\|\dot{x}\| = \|G(y)\|\|\dot{y}\| = \|F(g(y))\|\,.$$

На вопрос о том, как связаны первые интегралы автономных систем (6.4.3) и (6.4.4), отвечает

`Теорема 6.4.2` **Для того чтобы непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$, $x \in \Omega$ являлась первым интегралом системы (6.4.3), необходимо и достаточно, чтобы функция $v(y) = u(g(y))$, $y \in \Omega^*$ являлась первым интегралом системы (6.4.4).**

Достаточные условия существования $n-1$ функционально независимого первого интеграла системы (6.4.3), а также формулу для любого ее первого интеграла, дает

Теорема 6.4.3

Пусть точка $a \in \Omega$ не есть положение равновесия системы (6.4.3). Тогда

1°. В $\omega \subseteq \Omega$ – некоторой окрестности точки a, существует множество, состоящее из $n-1$ функционально независимых первых интегралов $u_{(1)}(x),\, u_{(2)}(x),\, \ldots,\, u_{(n-1)}(x)$.

2°. Для любого первого интеграла $u(x)$ найдется непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_{n-1})$ такая, что

$$u(x) = \Phi(u_{(1)}(x),\, u_{(2)}(x),\, \ldots,\, u_{(n-1)}(x))\,, \quad x \in \omega\,.$$

Следует также иметь в виду, что эта теорема гарантирует существование функции Φ лишь в ω – окрестности неособой точки a, но не *разом во всей области* Ω.

Что же касается окрестностей положения равновесия, то в них первые интегралы могут как существовать, так и нет. Тут оказывается необходимым дополнительное исследование.

Продемонстрируем теперь некоторые приемы отыскания первых интегралов на примере решения следующих задач.

Основная идея этих приемов – выделение (или искусственное построение) *полных* производных или дифференциалов от сложных функций.

`Задача:` Найти первый интеграл для системы дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2\,, \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 + x_1^3\,. \end{array} \right.$$

`Решение.` Здесь теорема о линеаризации не применима, поскольку положение равновесия линеаризации есть *центр*.
Поступим так: перемножив уравнения исходной системы крест накрест, получим

$$\left(-x_1 + x_1^3\right)\dot{x}_1 = x_2\dot{x}_2\,,$$

откуда $\quad \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{2}x_1^2 + \dfrac{1}{4}x_1^4 - \dfrac{1}{2}x_2^2\right) = 0\,.$ Значит, например,

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^4 + x_2^2$$

есть первый интеграл рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

`Задача 6.4.1` Найти независимые первые интегралы для системы дифференциальных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x\,, \\ \dot{y} & = & y\,, \\ \dot{z} & = & x^2 + y^2 + z\,. \end{array}\right.$$

при $x > 0,\ y > 0,\ z - x^2 - y^2 > 0.$

`Решение.` Исключая независимую переменную t из первых двух уравнений, получаем $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$, что дает $y = C_1 x$. Значит

$$u_{(1)}(x, y, z) = \frac{y}{x}$$

есть первый интеграл исследуемой системы дифференциальных уравнений.

При поиске первых интегралов для выделения полных производных или дифференциалов нередко оказывается удобным использование следующего *правила пропорций* (или *свойства равных дробей*) :

если

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\alpha_m}{\beta_m} = \gamma \,,$$

то

$$\frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m}{k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_m\beta_m} = \gamma \,,$$

для произвольных, неравных нулю одновременно чисел $k_1, \, k_2, \, \ldots \, k_m$.

Для использования этого правила запишем исходную систему в так называемом *симметричном виде*, в котором нет явного указания на то, какая из переменных является независимой.

В этом случае для записи системы используются не производные, а дифференциалы:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z}.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае (по правилу пропорций)

$$\frac{(-2x)dx}{(-2x)x} = \frac{(-2y)dy}{(-2y)y} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z} = \frac{dz - 2xdx - 2ydy}{z - x^2 - y^2},$$

а это дает равенство полных дифференциалов

$$\frac{d(z - x^2 - y^2)}{z - x^2 - y^2} = \frac{dx}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{z - x^2 - y^2}{x} = C_2.$$

Из равенства $\dfrac{z - x^2 - y^2}{x} = C_2$, в свою очередь, получаем другой первый интеграл

$$u_{(2)}(x, y, z) = \frac{z - x^2 - y^2}{x},$$

`Решение получено.`

который очевидно независим от найденного ранее, поскольку он в своей записи содержит переменную z.