# Показательная функция матрицы

Рассмотрим квадратные матрицы порядка $n$. Для них определены операции сравнения, сложения и умножения числа на матрицу. Если использовать умножение и обращение матриц, то можно определить и операцию возведения матрицы в степень с любым целым показателем.

| | |
|---|---|
| Определение 3.4.1 | Степенью $k$, где $k \geq 2$ натуральное число, квадратной матрицы $\|A\|$ порядка $n$ называется квадратная матрица $\|A\|^k$ того же порядка, равная $$\|A\|^k = \underbrace{\|A\| \cdot \|A\| \cdot \ldots \cdot \|A\|}_{k} \ .$$ Кроме того, будем считать, что $\|A\|^0 = \|E\|$ и $\|A\|^1 = \|A\|$. Наконец, при $\det \|A\| \neq 0$ определим $\|A\|^{-1}$ так, чтобы $\|A\|^{-1}\|A\| = \|E\|$ и при $k \geq 2$. $$\|A\|^{-k} = \underbrace{\|A\|^{-1} \cdot \|A\|^{-1} \cdot \ldots \cdot \|A\|^{-1}}_{k}$$ |

Заметим, что из этого определения следует выполнение при любых целых $k$ и $m$ равенства $\|A\|^{k+m} = \|A\|^k\|A\|^m$.

Далее для матриц определим, выполняемые поэлементно, операции *предельного перехода*, *дифференцирования* и *интегрирования*.

| | |
|---|---|
| `Определение 3.4.2` | Пусть элементы матрицы $\Vert A(t)\Vert$ непрерывно дифференцируемые функции $\alpha_{ij}(t)\ \ \forall i,j=[1,n]$ и $\forall t\in T$. Тогда элементами матрицы<br>– $\lim\limits_{t\to t_0}\Vert A(t)\Vert$ будут числа $\lim\limits_{t\to t_0}\alpha_{ij}(t)$;<br>– $\dfrac{d\,\Vert A(t)\Vert}{dt}$ будут функции $\dfrac{d}{dt}\alpha_{ij}(t)$;<br>– $\int\limits_{t_0}^{t}\Vert A(u)\Vert\,du$ будут интегралы с переменным верхним пределом $\int\limits_{t_0}^{t}\alpha_{ij}(u)\,du$ . |

Определения 3.4.1 и 3.4.2 позволяют вводить в рассмотрение и другие, более сложные функции матриц, используя для их описания *ряды*, то есть суммы с неограниченным числом слагаемых.

| | |
|---|---|
| Определение | *Показательной функцией* (или *экспонентой*) *матрицы* $\|A\|$ называется сумма матричного ряда $$e^{\|A\|} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{\|A\|}{1!} + \frac{\|A\|^2}{2!} + \frac{\|A\|^3}{3!} + \ldots$$ |

Отметим, что здесь (как и ранее) нижний индекс в круглых скобках является номером, в данном случае слагаемого в сумме.

| | |
|---|---|
| Определение 3.4.3 | Матрица $\|B\|$ называется *суммой матричного ряда* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \|A_{(k)}\|$ , если $\forall i, j = [1, n]$ числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_{ij(k)}$ , составленный из $ij$-х элементов матриц $\|A_{(k)}\|$ , сходится к $ij-$му элементу $\|B\|$ . |

Аналогичным образом определяются понятия *абсолютной сходимости* матричного ряда, а также *поточечной* и *равномерной* сходимости рядов образованных из матриц, элементами которых являются функции.

Здесь же отметим, что в силу определений 3.4.2 и 3.4.3, для матричных рядов оказываются справедливыми, аналогичные, доказанным в курсе математического анализа, теоремы о *непрерывности* суммы ряда, а также о возможности его *почленного дифференцирования* и *интегрирования*.

Для дальнейшего анализа условий сходимости матричных рядов оказывается полезным

| | |
|---|---|
| Определение 3.4.4 | *Нормой матрицы* $\|A\|$ называется число $\langle \|A\| \rangle$, равное $\max\limits_{i,j=[1,n]} \lvert \alpha_{ij} \rvert$ . |

Теорема 3.4.1 **Если $\left\langle \|A_{(k)}(t)\| \right\rangle \le a_k \ \forall k = 0, 1, 2, \ldots, \forall t \in T$ и мажорирующий числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ сходится, то матричный ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \|A_{(k)}(t)\|$ сходится абсолютно и равномерно на $T$.**

Имеет место

Теорема 3.4.2 **Для любой квадратной матрицы $\|A\|$ и каждого $\rho > 0$ матричный ряд**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \ldots \quad (3.4.1)$$

**сходится абсолютно и равномерно в круге $|t| \le \rho$ комплексной плоскости.**

| | |
|---|---|
| Определение 3.4.5 | *Показательной функцией* (или *экспонентой*) *матрицы* $\|A\|$ называется сумма матричного ряда $$e^{\|A\|} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{\|A\|}{1!} + \frac{\|A\|^2}{2!} + \frac{\|A\|^3}{3!} + \ldots$$ |

Согласно этому определению и правилу умножения числа на матрицу, сумма матричного ряда (3.4.1) будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \ldots = e^{t\|A\|} \ . \quad (3.4.3)$$

Основные свойства матричной экспоненты описывает

Теорема 3.4.3 **Пусть $\|A\|$ и $\|B\|$ квадратные матрицы порядка $n$. Тогда для матричной экспоненты справедливы равенства:**

– **если** $\|A\| \cdot \|B\| = \|B\| \cdot \|A\|$,

**то** $e^{\|A\|+\|B\|} = e^{\|A\|} e^{\|B\|}$**;**

– $\dfrac{d}{dt}\ e^{t\|A\|} = \|A\|\ e^{t\|A\|}$ .

`Следствие 3.4.1` **Матрица $\|X(t)\| = e^{t\|A\|}$ является решением задачи Коши с начальным условием $\|X(0)\| = \|E\|$ для матричного уравнения $\|\dot{X}\| = \|A\|\|X\|$.**

`Теорема 3.4.4` **Общее решение однородной системы (3.1.1) может быть представлено в форме**

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\| = e^{t\|A\|} \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{array} \right\| , \qquad (3.4.6)$$

**где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные комплексные числа.**

Иначе говоря, теорема 3.4.4 утверждает, что столбцами матрицы $e^{t\|A\|}$ являются решения задач Коши для однородной системы уравнений $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$, начальные условия в которых суть столбцы единичной матрицы. Такие решения линейно независимые и образуют базис в $n$-мерном линейном пространстве частных решений этой системы уравнений, что очевидно позволяет находить и общее решение этой системы уравнений.

Проиллюстрируем изложенную теорию следующим примером.

`Задача 3.4.1` Найти $e^{t\|A\|}$ , если $\|A\| = \left\| \begin{array}{rr} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\|$ .

`Решение.` Решим задачу двумя способами.

В первом способе воспользуемся следствием 3.4.1. Для этого нам нужно решить указанные в нем задачи Коши, для чего вначале найдем общее решение системы уравнений вида

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{rr} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\| . \qquad (3.4.9)$$

Матрица $\|A\|$ имеет (проверьте это!) двукратное собственное значение $\lambda_{1,2} = 2$ и, соответствующее ему одномерное собственное подпространство, базисом в котором является собственный вектор $\|h_{(1)}\| = \|1\ 1\|^{\mathrm{T}}$.

По формулам (3.2.2) найдем присоединенный к $\|h_{(1)}\|$ вектор $\|h_{(2)}\| = \|\eta_1 \ \eta_2\|^{\mathrm{T}}$, который в нашем случае определяется из системы линейных уравнений

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| \qquad \Longrightarrow$$

$$\eta_1 - \eta_2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|h_{(2)}\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| .$$

Используя (3.2.9) запишем общее решение системы (3.4.9) в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\| = C_1 e^{2t} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| + C_2 e^{2t} \left( t \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| \right)$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t} \left( t + 1 \right) \ , \\ x_2(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t} t \ . \end{cases}$$

Из общего решения находим нужные решения задач Коши.

Из $\left\| \begin{array}{c} x_1(0) \\ x_2(0) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 = 0, \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0, \\ C_2 = 1, \end{array} \right.$

то есть

$$\left\| \begin{array}{c} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \end{array} \right\| = e^{2t} \left( t \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| \right) = e^{2t} \left\| \begin{array}{c} t+1 \\ t \end{array} \right\| .$$

Аналогично,

из $\left\| \begin{array}{c} x_1(0) \\ x_2(0) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 = 1, \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 1, \\ C_2 = -1 \end{array} \right.$

откуда

$$\left\| \begin{array}{c} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \end{array} \right\| = e^{2t} \left( \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| - t \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| - \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| \right) = e^{2t} \left\| \begin{array}{c} -t \\ 1-t \end{array} \right\| .$$

Наконец, следуя правилу, указанному в формулировке следствия 3.4.1, составляем искомую матрицу

$$e^{t\|A\|} = e^{2t} \left\| \begin{array}{cc} t+1 & -t \\ t & 1-t \end{array} \right\| .$$