Показательная функция матрицы

Рассмотрим квадратные матрицы порядка n. Для них определены операции сравнения, сложения и умножения числа на матрицу. Если использовать умножение и обращение матриц, то можно определить и операцию возведения матрицы в степень с любым целым показателем.

Определение 3.4.1	Степенью k, где $k \geq 2$ натуральное число, квадратной матрицы $\|A\|$ порядка n называется квадратная матрица $\|A\|^k$ того же порядка, равная $$\|A\|^k = \underbrace{\|A\| \cdot \|A\| \cdot \ldots \cdot \|A\|}_{k} .$$ Кроме того, будем считать, что $\|A\|^0 = \|E\|$ и $\|A\|^1 = \|A\|$. Наконец, при $\det \|A\| \neq 0$ определим $\|A\|^{-1}$ так, чтобы $\|A\|^{-1}\|A\| = \|E\|$, и при $k \geq 2:$ $$\|A\|^{-k} = \underbrace{\|A\|^{-1} \cdot \|A\|^{-1} \cdot \ldots \cdot \|A\|^{-1}}_{k}$$

Заметим, что из этого определения следует выполнение при любых целых k и m равенства $\|A\|^{k+m} = \|A\|^k\|A\|^m$.

Далее для матриц определим выполняемые поэлементно операции *предельного перехода*, *дифференцирования* и *интегрирования*.

Определение 3.4.2	Пусть элементы матрицы $\|A(t)\|$ непрерывно дифференцируемые функции $\alpha_{ij}(t)\ \ \forall i,j=[1,n]$ и $\forall t \in T$. Тогда элементами матрицы – $\lim\limits_{t\to t_0}\|A(t)\|$ будут числа $\lim\limits_{t\to t_0}\alpha_{ij}(t)$; – $\dfrac{d\,\|A(t)\|}{dt}$ будут функции $\dfrac{d}{dt}\,\alpha_{ij}(t)$; – $\int\limits_{t_0}^{t}\|A(u)\|\,du$ будут интегралы с переменным верхним пределом $\int\limits_{t_0}^{t}\alpha_{ij}(u)\,du$.

Определения 3.4.1 и 3.4.2 позволяют вводить в рассмотрение и другие, более сложные функции матриц, используя для их описания *ряды*, то есть суммы с неограниченным числом слагаемых.

Отметим, что здесь (как и ранее) нижний индекс в круглых скобках является номером, в данном случае слагаемого в сумме.

Определение 3.4.3	Матрица $\|B\|$ называется *суммой матричного ряда* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \|A_{(k)}\|$, если $\forall i, j = [1, n]$ числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_{ij(k)}$, составленный из ij-х элементов матриц $\|A_{(k)}\|$, сходится к ij-му элементу $\|B\|$.

Аналогичным образом определяются понятия *абсолютной сходимости* матричного ряда, а также *поточечной* и *равномерной* сходимости рядов образованных из матриц, элементами которых являются функции.

Здесь же отметим, что, в силу определений 3.4.2 и 3.4.3, для матричных рядов оказываются справедливыми аналогичные доказанным в курсе математического анализа теоремы о *непрерывности* суммы ряда, а также о возможности его *почленного дифференцирования* и *интегрирования.*

Для дальнейшего анализа условий сходимости матричных рядов оказывается полезным

Определение 3.4.4	*Нормой матрицы* $\|A\|$ называется число $\langle \|A\| \rangle$, равное $\max\limits_{i,j=[1,n]} \lvert \alpha_{ij} \rvert$.

Теорема 3.4.1 **Если** $\left\langle \|A_{(k)}(t)\| \right\rangle \leq a_k \ \forall k = 0, 1, 2, \ldots, \forall t \in T$, **и мажорирующий числовой ряд** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ **сходится, то матричный ряд** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \|A_{(k)}(t)\|$ **сходится абсолютно и равномерно на** T.

Доказательство

Следует из определений 3.4.3 и 3.4.4, а также соответствующих свойств функциональных рядов.

Теорема доказана.

Имеет место

`Теорема 3.4.2` **Для любой квадратной матрицы $\|A\|$ и каждого $\rho > 0$ матричный ряд**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \dots \quad (3.4.1)$$

сходится абсолютно и равномерно в круге $|t| \leq \rho$ комплексной плоскости.

Доказательство

Согласно определению 3.4.4, для любой квадратной матрицы $\|A\|$ существует неотрицательное число $M = \langle\|A\|\rangle$, для которого $|\alpha_{ij}| \le M \ \forall i,j = [1,n]$. Оценим, исходя из правила умножения матриц, норму матрицы $\|A\|^2$. Обозначим элемент $\|A\|^k$ как $\alpha_{ij(k)}$. Поскольку

$$\|A\|^2 = \|A\| \cdot \|A\|, \text{ то } \alpha_{ij(2)} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is}\alpha_{sj},$$

и

$$\left|\alpha_{ij(2)}\right| \ \le \ \sum_{s=1}^{n} |\alpha_{is}||\alpha_{sj}| \ \le \ nM^2 \ .$$

Действуя аналогично для бо́льших степеней матрицы $\|A\|$, по индукции получаем $\left|\alpha_{ij(k)}\right| \le n^{k-1}M^k$.

В силу определения 3.4.3 сходимость матричного ряда (3.4.1) равносильна сходимости числовых рядов

$$\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k \alpha_{ij(k)}}{k!} = \delta_{ij} + \frac{t\alpha_{ij(1)}}{1!} + \frac{t^2\alpha_{ij(2)}}{2!} + \frac{t^3\alpha_{ij(3)}}{3!} + \ldots \quad (3.4.2)$$

для всех $i, j = [1, n]$. В этой формуле слагаемое δ_{ij} есть символ Кронекера.

Сходимость каждого из рядов (3.4.2) следует из сходимости мажорирующего числового ряда

$$1 + \frac{\rho M}{1!} + \frac{\rho^2 n M^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k n^{k-1} M^k}{k!} + \ldots \ ,$$

который сходится по признаку д'Аламбера (проверьте это самостоятельно!).

Наконец, используя утверждение теоремы 3.4.1, приходим к доказываемому результату.

Теорема доказана.

Определение 3.4.5	*Показательной функцией* (или *экспонентой*) *матрицы* $\|A\|$ называется сумма матричного ряда $$e^{\|A\|} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{\|A\|}{1!} + \frac{\|A\|^2}{2!} + \frac{\|A\|^3}{3!} + \ldots$$

Согласно этому определению и правилу умножения числа на матрицу, сумма матричного ряда (3.4.1) будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k\|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \ldots = e^{t\|A\|} \ . \qquad (3.4.3)$$

Основные свойства матричной экспоненты описывает

Теорема 3.4.3 **Пусть $\|A\|$ и $\|B\|$ квадратные матрицы порядка n. Тогда для матричной экспоненты справедливы равенства:**

– **если** $\|A\| \cdot \|B\| = \|B\| \cdot \|A\|$,

то $e^{\|A\|+\|B\|} = e^{\|A\|} e^{\|B\|}$**;**

– $$\frac{d}{dt}\ e^{t\|A\|} = \|A\|\ e^{t\|A\|}\ .$$

Доказательство

$$e^{\|A\|}\ e^{\|B\|} =$$

$$= \left(\|E\| + \frac{\|A\|}{1!} + \frac{\|A\|^2}{2!} + \ldots \right) \left(\|E\| + \frac{\|B\|}{1!} + \frac{\|B\|^2}{2!} + \ldots \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} g_{km} \|A\|^k \|B\|^m. \qquad (3.4.4)$$

С другой стороны,

$$e^{\|A\|+\|B\|} = \|E\| + \frac{\|A\| + \|B\|}{1!} + \frac{(\|A\| + \|B\|)^2}{2!} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} h_{km} \|A\|^k \|B\|^m\ , \qquad (3.4.5)$$

поскольку из коммутируемости матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ следует справедливость матричного аналога формулы бинома Ньютона, то есть равенств вида

$$(\|A\|+\|B\|)^2 = (\|A\|+\|B\|)(\|A\|+\|B\|) =$$

$$= \|A\|^2 + \|A\|\|B\| + \|B\|\|A\| + \|B\|^2 = \|A\|^2 + 2\|A\|\|B\| + \|B\|^2$$

и им подобным.

Таким образом, матрицы $\|A\|$ и $\|B\|$ (в предположении коммутативности их произведения) по алгебраическим свойствам не отличаются от чисел. Значит, вид разложений (3.4.4) и (3.4.5) не зависит от того, являются ли $\|A\|$ и $\|B\|$ числами или матрицами.

Сравним теперь значения коэффициентов g_{km} и h_{km} исходя из факта, что разложение функции в степенной ряд, если существует, то оно единственно. Это дает

$$g_{km} = h_{km} \ \ \forall k, m = 0, 1, 2, 3, \ldots\ ,$$

то есть выражения (3.4.4) и (3.4.5) совпадают.

Убедимся теперь в справедливости второго утверждения теоремы.

Поскольку в нашем случае матричный ряд (3.4.3) сходится на множестве T, а ряд, составленный из производных его членов, сходится равномерно к производной от суммы ряда, то его можно почленно дифференцировать. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\ e^{t\|A\|} = \frac{d}{dt}\left(\|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= \|A\| + \frac{t\|A\|^2}{1!} + \frac{t^2\|A\|^3}{2!} + \frac{t^3\|A\|^4}{3!} + \ldots =$$

$$= \|A\|\left(\|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= \|A\|\ e^{t\|A\|}\ .$$

И мы приходим к заключению о справедливости второго утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Следствие 3.4.1 **Матрица $\|X(t)\| = e^{t\|A\|}$ является решением задачи Коши с начальным условием $\|X(0)\| = \|E\|$ для матричного уравнения $\|\dot{X}\| = \|A\|\|X\|$.**

Доказательство

Очевидно вытекает из второго утверждения теоремы 3.4.3.

Следствие доказано.

Теорема 3.4.4 **Общее решение однородной системы (3.1.1) может быть представлено в форме**

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\| = e^{t\|A\|} \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{array} \right\| , \qquad (3.4.6)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – **произвольные комплексные числа.**

Доказательство

Пусть k-й столбец матрицы $\|X(t)\|$ есть вектор-функция $\|g_{(k)}(t)\| \quad \forall k = [1,n]$. Тогда матричное дифференциальное уравнение

$$\|\dot{X}\| = \|A\|\|X\|$$

можно записать в покомпонентном виде, как следующий набор из n систем $\forall k = [1,n]$:

$$\begin{cases} \dot{g}_{1(k)}(t) & = & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} g_{j(k)}(t) \ , \\ \dot{g}_{2(k)}(t) & = & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j} g_{j(k)}(t) \ , \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{g}_{n(k)}(t) & = & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} g_{j(k)}(t) \ . \end{cases}$$

Это означает, что каждая вектор-функция $\|g_{(k)}(t)\|$ есть частное решение однородной системы (3.1.1).

Кроме того, поскольку $\|X(0)\| = \|E\|$, то каждая такая вектор-функция есть решение задачи Коши с начальным условием в виде

$$\|g_{(k)}(0)\| = \|\, 0 \; 0 \; \dots \; 0 \; 1 \; 0 \; \dots \; 0 \; 0 \,\|^{\mathrm{T}},$$

где единица стоит в k-й строке столбца – результата транспонирования.

Эти столбцы, очевидно, линейно независимые, значит, по теореме существования и единственности решения задачи Коши линейно независимыми будут и сами вектор-функции $\|g_{(k)}(t)\| \ \forall k = [1,n]$.

Но тогда $\|g_{(k)}(t)\| \ \forall k = [1,n]$ можно принять за базис в линейном пространстве частных решений однородной системы (3.1.1), и записать общее решение как

$$\|\, x(t)\| = \sum_{k=1}^{n} C_k \|\, g_{(k)}(t)\|$$

или в матричной форме:

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\| = \|X(t)\| \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{array} \right\| ,$$

где C_1, C_2, $\dots$, C_n – произвольные комплексные числа.

Откуда, использовав равенство $\|X(t)\| = e^{t\|A\|}$, получим утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Иначе говоря, теорема 3.4.4 утверждает, что столбцами матрицы $e^{t\|A\|}$ являются решения задач Коши для однородной системы уравнений $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$, начальные условия в которых суть столбцы единичной матрицы. Такие решения линейно независимые и образуют базис в n-мерном линейном пространстве частных решений этой системы уравнений, что, очевидно, позволяет находить и общее решение этой системы уравнений.

Другим способом вычисления матричной экспоненты $e^{t\|A\|}$ (альтернативным следствию 3.4.1) служит формула (3.4.3). Однако ее использование в случае произвольной матрицы $\|A\|$ является непростой задачей. Значительно более эффективным (с вычислительной точки зрения) методом нахождения $e^{t\|A\|}$ оказывается алгоритм, основанный на следующих лемме и теореме.

Лемма 3.4.1 **Если матрица $\|D\|$ диагональна, т.е. у нее на главной диагонали стоят числа $\lambda_k \ \ \forall k = [1, n]$, а остальные элементы нулевые, то**

$$e^{\|D\|} = \left\| \begin{array}{cccccc} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{array} \right\| .$$

Доказательство

Следует из определения 3.4.5 и правил умножения матриц.

Лемма доказана.

Теорема 3.4.5 **Пусть матрицы $\|A\|$, $\|B\|$ и $\|S\|$ квадратные, порядка n , и пусть матрица $\|S\|$ имеет обратную. Тогда если $\|A\| = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1}$, то**

$$e^{t\|A\|} = \|S\|e^{t\|B\|}\|S\|^{-1} \ \ \forall t \in T\,.$$

Доказательство

Имеем

$$\|A\| = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1}\ ,$$

$$\|A\|^2 = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1} \cdot \|S\|\|B\|\|S\|^{-1} = \|S\|\|B\|^2\|S\|^{-1}\ ,$$

$$\|A\|^3 = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1} \cdot \|S\|\|B\|^2\|S\|^{-1} = \|S\|\|B\|^3\|S\|^{-1}\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\|A\|^k = \|S\|\|B\|\|S\|^{-1} \cdot \|S\|\|B\|^{k-1}\|S\|^{-1} = \|S\|\|B\|^k\|S\|^{-1}\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Подставляя в формулу (3.4.3) $\|A\|^k = \|S\|\|B\|^k\|S\|^{-1}$, получаем

$$e^{t\|A\|} = \|S\|\|E\|\|S\|^{-1} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\|S\|\|B\|^k\|S\|^{-1} =$$

$$= \|S\|\left(\|E\| + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\|B\|^k\right)\|S\|^{-1} = \|S\|e^{t\|B\|}\|S\|^{-1}\,.$$

Теорема доказана.

Из курса линейной алгебры известно, что если в U^n существует базис из собственных векторов линейного преобразования, задаваемого матрицей $\|A\|$, то матрица $\|D\|$, определяемая формулой

$$\|D\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|\,,$$

диагональна (здесь $\|S\|$ есть матрица перехода от исходного базиса к базису из собственных векторов). Построив этот базис и вычислив матрицы $\|S\|$ и $\|D\|$ (см. лемму 3.4.1), используя теорему 3.4.5, найдем искомую матричную экспоненту по формуле

$$e^{t\|A\|} = \|S\|e^{t\|D\|}\|S\|^{-1}\,.$$

В случае, когда базис из собственных векторов матрицы $\|A\|$ не существует, всегда возможно, согласно теореме 3.2.2 (Жордана), перейти (при помощи невырожденной матрицы перехода $\|S\|$) к базису, в котором матрица $\|A\|$ будет иметь *нормальную жорданову форму* $\|J\|$, то есть иметь блочно-диагональную структуру, составленную из жордановых, размером l x l клеток (3.2.1) вида

$$\|J_l(\lambda)\| = \left\| \begin{array}{ccccccc} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right\| .$$

Покажем теперь, что экспоненту жордановой клетки можно найти, не вычисляя сумму какого-либо ряда. Действительно,

$$t\|J_l(\lambda)\| = t\lambda\|E\| + t\|J_l(0)\|, \qquad \text{где}$$

$$\|J_l(0)\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Матрицы $\|E\|$ и $\|J_l(0)\|$, очевидно, коммутируют, поэтому (согласно теореме 3.4.3):

$$e^{t\|J_l(\lambda)\|} = e^{t\lambda\|E\| + t\|J_l(0)\|} = e^{t\lambda\|E\|} \cdot e^{t\|J_l(0)\|} \ .$$

Первый сомножитель легко вычисляется при помощи леммы 3.4.1.

Второй найдем при помощи формулы (3.4.3):

$$e^{t\|J_l(0)\|} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \left\| J_l(0) \right\|^k . \tag{3.4.7}$$

Заметим, что согласно правилу умножения матриц

$$\|J_l(0)\|^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} ,$$

. . . .

$$\|J_l(0)\|^{l-2} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} ,$$

$$\|J_l(0)\|^{l-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} .$$

То есть при каждом последовательном увеличении на единицу k – показателя степени в $\|J_l(0)\|^k$ – единичная наддиагональ *укорачивается* на единицу и *сдвигается* вправо на один столбец и вверх на одну строку.

При $k = l$ матрица $\|J_l(0)\|^k$ оказывается нулевой, и ряд (3.4.7) обрывается, превращаясь в обычную сумму с конечным числом слагаемых.

В итоге получаем, что

$$e^{t\|J_l(0)\|} = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{k!}\,\|J_l(0)\|^k =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & \dfrac{t}{1!} & \dfrac{t^2}{2!} & \ldots & \dfrac{t^{l-3}}{(l-3)!} & \dfrac{t^{l-2}}{(l-2)!} & \dfrac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & \dfrac{t}{1!} & \ldots & \dfrac{t^{l-4}}{(l-4)!} & \dfrac{t^{l-3}}{(l-3)!} & \dfrac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \dfrac{t^{l-5}}{(l-5)!} & \dfrac{t^{l-4}}{(l-4)!} & \dfrac{t^{l-3}}{(l-3)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \dfrac{t}{1!} & \dfrac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \dfrac{t}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| . \qquad (3.4.8)$$

Вычислив аналогичным методом экспоненты всех жордановых клеток матрицы $\|J\|$, из которых составлена клеточно-диагональная матрица $e^{t\|J\|}$, и возвратившись в исходный базис по формуле

$$e^{t\|A\|} = \|S\| e^{t\|J\|} \|S\|^{-1} \ ,$$

получим искомую экспоненту матрицы $t\|A\|$.

Проиллюстрируем изложенную теорию следующим примером.

Задача 3.4.1 Найти $e^{t\|A\|}$, если $\|A\| = \left\| \begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|$.

Решение Решим задачу двумя способами.

В первом способе воспользуемся следствием 3.4.1. Для этого нам нужно решить указанные в нем задачи Коши, для чего вначале найдем общее решение системы уравнений вида

$$\left\| \begin{matrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\| . \tag{3.4.9}$$

Матрица $\|A\|$ имеет (проверьте это!) двукратное собственное значение $\lambda_{1,2} = 2$ и соответствующее ему одномерное собственное подпространство, базисом в котором является собственный вектор $\|h_{(1)}\| = \|1\ 1\|^{\mathrm{T}}$. По формулам (3.2.2) найдем присоединенный к $\|h_{(1)}\|$ вектор $\|h_{(2)}\| = \|\eta_1\ \eta_2\|^{\mathrm{T}}$, который в нашем случае определяется из системы линейных уравнений

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \eta_1 - \eta_2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|h_{(2)}\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| .$$

Используя (3.2.9), запишем общее решение системы (3.4.9) в виде

$$\left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\| = C_1 e^{2t} \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| + C_2 e^{2t} \left(t \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| \right)$$

или в координатной форме:

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t} (t+1) \ , \\ x_2(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t} t \ . \end{cases}$$

Из общего решения находим нужные решения задач Коши: первое

$$\text{из } \left\| \begin{matrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| \ \Rightarrow \ \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 = 0, \end{cases} \ \Rightarrow \ \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1, \end{cases}$$

то есть

$$\left\| \begin{matrix} x_{1(1)}(t) \\ x_{2(1)}(t) \end{matrix} \right\| = e^{2t} \left(t \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| \right) = e^{2t} \left\| \begin{matrix} t+1 \\ t \end{matrix} \right\| .$$

Аналогично, второе

$$\text{из } \left\| \begin{matrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| \ \Rightarrow \ \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 = 1, \end{cases} \ \Rightarrow \ \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -1, \end{cases}$$

откуда

$$\left\| \begin{array}{c} x_{1(2)}(t) \\ x_{2(2)}(t) \end{array} \right\| = e^{2t} \left(\left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| - t \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| - \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| \right) = e^{2t} \left\| \begin{array}{c} -t \\ 1-t \end{array} \right\| .$$

Наконец, следуя правилу, указанному в формулировке следствия 3.4.1, составляем искомую матрицу

$$e^{t\|A\|} = \left\| \begin{array}{cc} x_{1(1)} & x_{1(2)} \\ x_{2(1)} & x_{2(2)} \end{array} \right\| = e^{2t} \left\| \begin{array}{cc} t+1 & -t \\ t & 1-t \end{array} \right\| .$$

Во втором варианте решения задачи приведем матрицу к жордановой форме и затем воспользуемся леммой 3.4.1 и теоремой 3.4.5.

Согласно теореме 3.2.2 (Жордана) жорданов базис в рассматриваемом случае состоит из элементов $\|h_{(1)}\|$ и $\|h_{(2)}\|$. Значит $\|S\|$ – матрица перехода от исходного базиса к жорданову – будет иметь вид

$$\|S\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| ,$$

поскольку ее столбцами служат координатные представления элементов нового базиса. Как известно, матрица перехода невырожденная, поэтому обратная ей матрица существует и единственна:

$$\|S\|^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| .$$

Переход к жордановой форме осуществляется по правилу

$$\|J\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\| ,$$

что дает жорданову клетку:

$$\|J_2\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right\| .$$

В нашем случае $\lambda = 2$ и $l = 2$, поэтому из (3.4.8) и из $t\|J_l(\lambda)\| = \lambda t\|E\| + t\|J_l(0)\|$ следует

$$e^{t\|J_2(\lambda)\|} = e^{2t\|E\|+t\|J_2(0)\|} = e^{2t\|E\|} \cdot e^{t\|J_2(0)\|} =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & t \\ 0 & 1 \end{array} \right\| = e^{2t} \left\| \begin{array}{cc} 1 & t \\ 0 & 1 \end{array} \right\| .$$

Наконец, по формуле $e^{t\|A\|} = \|S\| \; e^{t\|J\|} \|S\|^{-1}$ получаем

$$e^{t\|A\|} = e^{2t} \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & t \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| =$$

$$= e^{2t} \left\| \begin{array}{cc} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{array} \right\| .$$

Решение получено.

В заключение обсуждения свойств матричной экспоненты опишем метод, позволяющий находить решения нескольких задач Коши, сформулированных для одного и того же начального $t = t_0$.

Поскольку множество всех частных решений однородной системы (3.1.1) является n-мерным линейным пространством, то ее общее решения может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\| = \|\Phi(t)\| \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{array} \right\| ,$$

где C_1, C_2, …, C_n – произвольные комплексные числа. Или же в более компактной форме:

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t)\| \, \|C\| \ . \tag{3.4.10}$$

При этом столбцами матрицы $\|\Phi(t)\|$ (часто называемой *фундаментальной*) являются координатные столбцы базисных частных решений системы (3.1.1). Примером такой матрицы, в силу равенства (3.4.6), может служить $e^{t\|A\|}$.

Если в задаче Коши начальное условие имеет вид $\|x(t_0)\| = \|x_0\|$, то

$$\|x_0\| = \|\Phi(t_0)\| \, \|C\| \quad \Longrightarrow \quad \|C\| = \|\Phi(t_0)\|^{-1} \, \|x_0\| \ .$$

Тогда решение задачи Коши (в силу (3.4.10)) в базисе с $\|\Phi(t)\|$ будет иметь вид

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t)\|\|\Phi(t_0)\|^{-1} \, \|x_0\| \tag{3.4.11}$$

Пусть $\|S\|$ – матрица перехода в пространстве частных решений, связывающая базисы, имеющие фундаментальные матрицы $\|\Phi(t)\|$ и $e^{t\|A\|}$, такие, что выполнены равенства

$$e^{t\|A\|} = \|\Phi(t)\| \, \|S\| \qquad \text{и} \qquad e^{t_0\|A\|} = \|\Phi(t_0)\| \, \|S\| \ .$$

Тогда $\quad \|S\| = \|\Phi(t_0)\|^{-1} e^{t_0\|A\|} \quad$ и, значит, в базисе с любой фундаментальной матрицей $\|\Phi(t)\|$

$$\|\Phi(t)\|\|\Phi(t_0)\|^{-1} = e^{(t-t_0)\|A\|} \, . \tag{3.4.12}$$

Наконец, подставив (3.4.12) в (3.4.11), получим более удобный для практического использования, чем формула (3.4.11), вид решения задачи Коши

$$\|x(t)\| = e^{(t-t_0)\|A\|} \, \|x_0\| \ . \tag{3.4.13}$$

Эффект использования формулы (3.4.12) демонстрирует

Задача 3.4.2 Для системы уравнений

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 4 & -5 \\ 2 & -2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\|$$

найти вещественные решения задач Коши со следующими начальными условиями

$$\left\| x_{(1)}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| ;$$

$$\left\| x_{(2)}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\| = \left\| \begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right\| ;$$

$$\left\| x_{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| .$$

`Решение` Характеристическое уравнение данной системы имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, а собственные векторы

$$\left\| f_{(1,2)} \right\| = \left\| \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\| \pm i \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| .$$

Тогда общее вещественное решение решаемой системы будет

$$\left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\| = e^t \left(C_1 \left\| \begin{matrix} 3\cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{matrix} \right\| + C_2 \left\| \begin{matrix} \cos t + 3\sin t \\ 2\sin t \end{matrix} \right\| \right)$$

или

$$\left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \right\| = e^t \left\| \begin{matrix} 3\cos t - \sin t & \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t & 2\sin t \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} \right\| .$$

Значит, в нашем случае

$$\Phi(t) = e^t \left\| \begin{matrix} 3\cos t - \sin t & \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t & 2\sin t \end{matrix} \right\| .$$

Матричную экспоненту при $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$ найдем при помощи формулы (3.4.11). Имеем

$$\Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left\| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| \exp\left(\frac{\pi}{4}\right) .$$

Откуда находим

$$\Phi^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{matrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right\| \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) .$$

Тогда, согласно (3.4.11),

$$\exp\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \|A\|\right) = \|\Phi(t)\| \left\| \Phi^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\| =$$

$$= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{cc} 3\cos t - \sin t & \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t & 2\sin t \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{rr} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{cc} -2\cos t + 4\sin t & 5\cos t - 5\sin t \\ -2\cos t + 2\sin t & 4\cos t - 2\sin t \end{array} \right\| .$$

Наконец, по формуле (3.4.12) выписываем решения задачи Коши единообразно для всех трех случаев:

$$\left\| \begin{array}{c} x_{(1)1}(t) \\ x_{(1)2}(t) \end{array} \right\| = \exp\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\|A\|\right) \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{c} 3\cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{array} \right\| ;$$

$$\left\| \begin{array}{c} x_{(2)1}(t) \\ x_{(2)2}(t) \end{array} \right\| = \exp\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\|A\|\right) \left\| \begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{c} 10\sin t \\ -2\cos t + 6\sin t \end{array} \right\| ;$$

$$\left\| \begin{array}{c} x_{(3)1}(t) \\ x_{(3)2}(t) \end{array} \right\| = \exp\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\|A\|\right) \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{e^{t-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{c} 5\cos t - 5\sin t \\ 4\cos t - 2\sin t \end{array} \right\| .$$

Решение получено.