Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (случай жорданова базиса)

Рассмотрим теперь процедуру построения общего решения системы уравнений (3.1.1) в случае, когда условия теоремы 3.1.3 не выполнены. Такая ситуация может возникнуть при наличии *кратных* корней у характеристического уравнения линейного преобразования $\widehat{A}$, задаваемого в U^n матрицей $\|A\|$.

Примером матрицы с подобными свойствами является квадратная матрица порядка $l \geq 2$ следующего вида

$$\|J_l(\lambda_0)\| = \left\| \begin{array}{ccccccc} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| . \tag{3.2.1}$$

Такую матрицу называют *жордановой клеткой* порядка l. У нее все элементы, стоящие на главной диагонали, одинаковы, элементы, расположенные на первой наддиагонали, равны единице, а остальные элементы нули.

Матрица $\|J_l(\lambda_0)\|$, определяющая некоторое линейное преобразование $\widehat{J}_l$ в U^l, имеет единственное собственное значение $\lambda = \lambda_0$ кратности l, которому отвечает лишь один линейно независимый собственный вектор $\|f\| = \|1\ 0\ 0\ \ldots\ 0\|^{\mathrm{T}}$, поскольку $\operatorname{rg}\|\widehat{J}_l(\lambda_0) - \lambda_0\widehat{E}\| = l - 1$.

Значит, размерность собственного подпространства равна единице и базис из собственных векторов $\|J_l(\lambda_0)\|$ в U^l не существует.

Элементы базиса в U^l, в котором преобразование $\|\widehat{A}\|$ имеет матрицу вида (3.2.1), должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$
\begin{array}{lcl}
\|\widehat{A}\|\|h_{(1)}\| = \lambda_0\|h_{(1)}\| \,, & & \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \,, \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(2)}\| = \lambda_0\|h_{(2)}\| + \|h_{(1)}\| \,, & & \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \,, \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(3)}\| = \lambda_0\|h_{(3)}\| + \|h_{(2)}\| \,, & \Longrightarrow & \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\| \,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(l)}\| = \lambda_0\|h_{(l)}\| + \|h_{(l-1)}\| & & \|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\| \,.
\end{array}
\tag{3.2.2}
$$

Теперь покажем, что в пространстве частных решений системы (3.1.1) возможно построить базис, позволяющий описать ее общее решение, добавив к собственным векторам $\|A\|$ дополнительные элементы пространства U^n, определяемые формулами (3.2.2).

Пусть λ_0 – собственное значение, а $\|h_{(1)}\|$ – соответствующий ему собственный вектор линейного преобразования $\|\widehat{A}\|$, действующего в U^n. Тогда можно дать

Определение 3.2.1

Элементы $\|h_{(1)}\|,\ \|h_{(2)}\|,\ \dots\ ,\|h_{(l)}\|$, принадлежащие U^l и являющиеся решениями уравнений:

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \ ,\\
&\|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \ ,\\
&\|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\| \ ,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\| \ ,
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

в то время как уравнение

$$\|\widehat{A}-\lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(l+1)}\| = \|h_{(l)}\|$$

решений не имеет, называются *жордановой цепочкой* длины l, начинающейся с собственного вектора $\|h_{(1)}\|$.

Элементы $\|h_{(2)}\|,\ \|h_{(3)}\|,\ \dots\ ,\|h_{(l)}\|$ называются *присоединенными векторами* к вектору $\|h_{(1)}\|$.

Например (покажите это самостоятельно), жорданова цепочка, построенная для матрицы вида (3.2.1) с начальным собственным вектором $\|f\| = \|1\ 0\ 0\ \ldots\ 0\|^{\mathrm{T}}$, является стандартным базисом в линейном пространстве U^l.

Имеет место

Теорема 3.2.1 **Множество элементов в U^l, являющихся**
- **какой-либо жордановой цепочкой;**
- **либо объединением нескольких различных жордановых цепочек,**

линейно независимое.

В курсе линейной алгебры также доказывается, важная для рассматриваемой задачи,

Теорема 3.2.2 (Жордана) **Для любого линейного преобразования $\widehat{A}$ в U^n существует базис (называемый *жордановым*), образованный из всех жордановых цепочек для всех попарно различных собственных значений этого преобразования.**

Определение 3.2.2

Жордановым блоком, отвечающим собственному значению λ_0 кратности k с q-мерным собственным подпространством, назовем квадратную, порядка k, блочно-диагональную матрицу $\|J(\lambda_0)\|$ вида

$$\left\| \begin{array}{cccc} \|J_{l_1}(\lambda_0)\| & \|\, O \,\| & \dots & \|\, O \,\| \\ \|\, O \,\| & \|J_{l_2}(\lambda_0)\| & \dots & \|\, O \,\| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \|\, O \,\| & \|\, O \,\| & \dots & \|J_{l_q}(\lambda_0)\| \end{array} \right\| ,$$

где расположенные на главной диагонали квадратные подматрицы $\|J_{l_1}\|$, $\|J_{l_2}\|$, $\dots$, $\|J_{l_q}\|$, суть жордановы клетки вида (3.2.1), отвечающие собственному значению λ_0 и каждому из q линейно независимых собственных векторов, начинающих соответствующие жордановы цепочки, имеющих длины $l_1,\ l_2,\ \dots\ l_q$.
Через $\|\, O \,\|$ обозначены нулевые подматрицы подходящего размера.

Сумма порядков (размеров) жордановых клеток в блоке, равна кратности собственного значения λ_0, то есть

$$l_1 + l_2 + \ldots\ + l_q = k\ .$$

Например, жордановы блоки с $k = 4$ и $q = 2$ могут иметь вид

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| \qquad \left\| \begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| \qquad \left\| \begin{array}{c|ccc} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| .$$

Пусть линейное преобразование $\|\widehat{A}\|$, действующее в U^n, заданное матрицей $\|A\|$, имеет характеристический многочлен вида

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \ ,$$

причем $\lambda_j \neq \lambda_i$ при $j \neq i$ и $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$.

Определение 3.2.3

Будем говорить, что матрица $\|A\|$ имеет *нормальную жорданову форму*, если она записана в блочно-диагональном виде (см. рис. 3.1)

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} \|J(\lambda_1)\| & \| O \| & \ldots & \| O \| \\ \| O \| & \|J(\lambda_2)\| & \ldots & \| O \| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \| O \| & \| O \| & \ldots & \|J(\lambda_s)\| \end{array} \right\| ,$$

где расположенные на главной диагонали квадратные подматрицы

$$\|J(\lambda_1)\|, \ \|J(\lambda_2)\|, \ \ldots \ \|J(\lambda_s)\|$$

являются жордановыми блоками, отвечающими попарно различным собственным значениям преобразования $\widehat{A}$, а через $\| O \|$ обозначены нулевые подматрицы подходящего размера.

Резюмируя определения (3.2.1) – (3.2.3), можно сказать, что матрица имеет нормальную жорданову форму, если у нее на главной диагонали расположены s жордановых блоков, где s – число различных собственных значений матрицы $\|A\|$, а остальные элементы – нули.

При этом жорданов блок с номером s есть квадратная подматрица порядка k_j, (k_j – кратность λ_j) состоящая из q_j жордановых клеток, где q_j – максимальное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих λ_j, равное размерности его собственного подпространства. На главной диагонали каждого блока расположено число λ_j – собственное значение, которому этот блок соответствует.

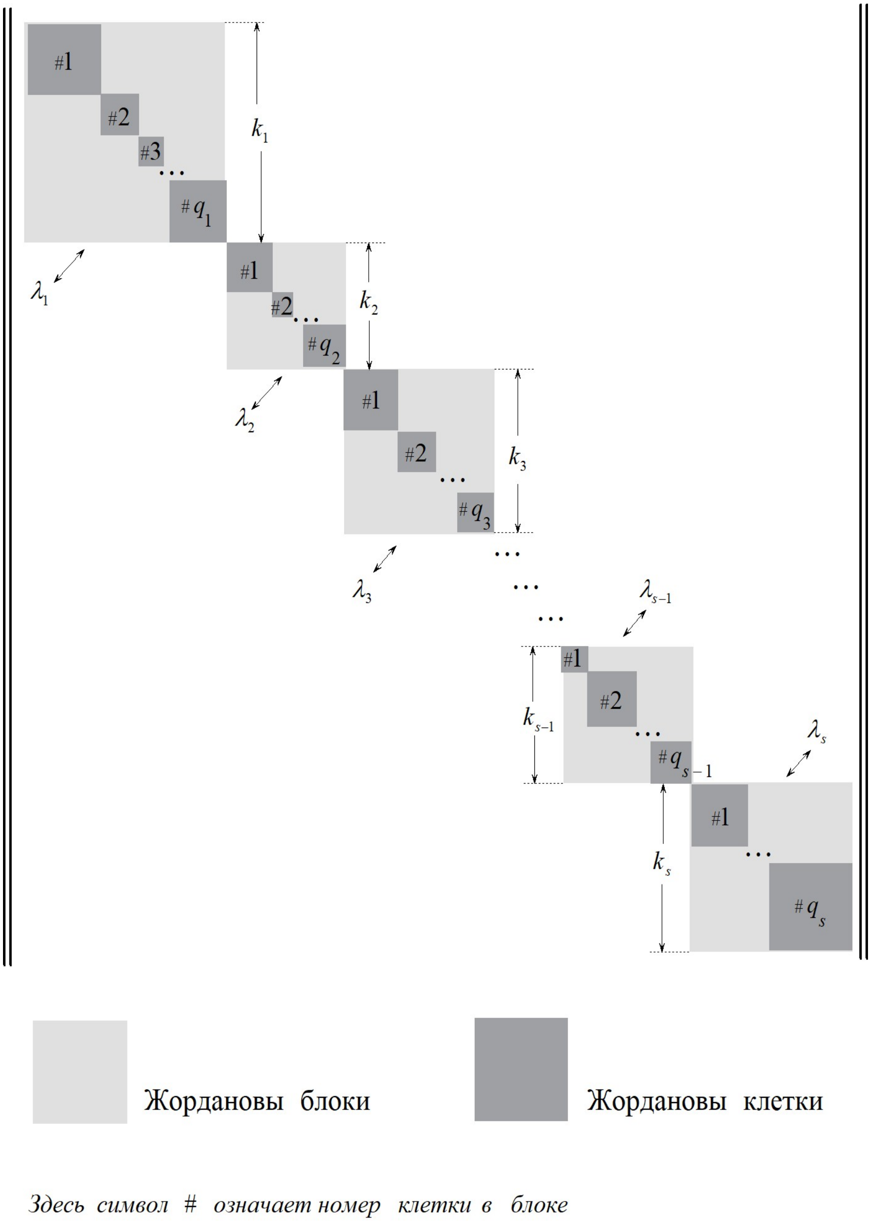

Рис. 1. Нормальная жорданова форма матрицы.

Итак, q_j равно максимальному числу *линейно независимых* собственных векторов, отвечающих λ_j, и для матрицы $\|A\|$ в жордановой форме будут справедливы следующие утверждения.

1°. Число ее жордановых блоков равно числу различных собственных значений матрицы $\|A\|$.

2°. Размер каждого блока равен кратности собственного значения, соответствующего этому блоку. Сумма размеров всех блоков равна n – размеру матрицы $\|A\|$.

3°. Число жордановых клеток в жордановом блоке равно размерности собственного подпространства собственного значения, соответствующего этому блоку, и равно числу жордановых цепочек, начинающихся с различных линейно независимых собственных векторов этого подпространства.

4°. Сумма размеров всех жордановых клеток в жордановом блоке равна размеру этого блока, то есть кратности собственного значения, соответствующего данному блоку.

`Теорема 3.2.3` **Матрица каждого линейного преобразования в U^n имеет в жордановом базисе нормальную жорданову форму.**

Теоремы 3.2.2 (Жордана) и 3.2.3 в совокупности утверждают, что для любого линейного преобразования в U^n имеется жорданов базис в котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму, то есть состоит из жордановых клеток вида (3.2.1), расположенных вдоль главной диагонали.

Воспользуемся этим фактом для решения однородной системы (3.1.1) в случае, когда условия теоремы 3.1.3 не выполняются.

Пусть невырожденная матрица

$$\|S\| = \left\| \begin{array}{cccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{array} \right\|$$

есть матрица перехода от исходного базиса в U^n к жорданову базису.

Тогда матрица $\|J\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|$ будет иметь жорданову форму, причем) характеристические многочлены у матриц $\|J\|$ и $\|A\|$ одинаковые. А, значит, корни их характеристических уравнений одинаковые и одинаковой кратности.

Выполнив замену неизвестных в системе $\|\dot{x}\| = \|A\| \|x\|$ по формуле

$$\| x(t)\| = \|S\| \| y(t)\| \quad \text{или} \quad x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\, y_j(t) \quad \forall i = [1, n], \tag{3.2.6}$$

получим $\|S\| \|\dot{y}\| = \|A\| \|S\| \|y\|$ или $\|\dot{y}\| = \|S\|^{-1} \|A\| \|S\| \|y\|$ и, окончательно,

$$\|\dot{y}\| = \|J\| \|y\|, \tag{3.2.7}$$

где $\|J\|$ — жорданова матрица.

Система уравнений (3.2.7) имеет блочно-диагональную матрицу. Поэтому решения $y(t)$ можно искать для каждой жордановой клетки отдельно. Например, для самой первой клетки, положив $\lambda = \lambda_1$ и $l = l_1$, имеем (с учетом (3.2.4)) подсистему вида

$$\left\| \begin{array}{l} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dots \\ \dot{y}_{l-1} \\ \dot{y}_l \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{l-1} \\ y_l \end{array} \right\|$$

или

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 \ , \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3 \ , \\ \dot{y}_3 = \lambda y_3 + y_4 \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_{l-1} = \lambda y_{l-1} + y_l \ , \\ \dot{y}_l = \lambda y_l \ . \end{cases}$$

Последнюю систему удобнее решать, сделав предварительно подстановку

$$y_j(t) = e^{\lambda t} u_j(t) \ \ \forall j = [1, l].$$

В этом случае для $u_j(t)$ $\forall j = [1, l]$ получаем систему

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = u_2(t) \ , \\ \dot{u}_2(t) = u_3(t) \ , \\ \dot{u}_3(t) = u_4(t) \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{u}_{l-1}(t) = u_l(t) \ , \\ \dot{u}_l(t) = 0 \ . \end{cases}$$

Решив эту систему, начиная с последнего уравнения, найдем, что

$$u_l(t) = C_l \ ,$$

$$u_{l-1}(t) = C_l t + C_{l-1} \ ,$$

$$u_{l-2}(t) = C_l \frac{t^2}{2} + C_{l-1} t + C_{l-2} \ ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_1(t) = C_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + C_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \ldots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1 \ .$$

Откуда

$$\begin{aligned} & y_l(t) = C_l e^{\lambda t} \ , \\ & y_{l-1}(t) = \Big(C_l t + C_{l-1} \Big) e^{\lambda t} \ , \\ & y_{l-2}(t) = \left(C_l \frac{t^2}{2} + C_{l-1} t + C_{l-2} \right) e^{\lambda t} \ , \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & y_1(t) = \left(C_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + C_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \ldots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1 \right) e^{\lambda t} \ . \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Проведя аналогичные вычисления для всех клеток во всех жордановых блоках, получим общее решение системы уравнений (3.2.7). Переход к исходным неизвестным выполняется по формулам (3.2.6), которые позволяют получить общее решение системы (3.1.1), итоговый вид которого определяет

Теорема 3.2.4 **Общее решение однородной системы (3.1.1) есть вектор-функция, каждая компонента которой имеет вид**

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{q} P_{ij}(t) e^{\lambda_j t} \quad \forall i = [1, n] ,$$

где $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots \ \lambda_q$ **— все** *попарно различные* **собственные значения преобразования, заданного матрицей** $\|A\|$, **а** $P_{ij}(t)$ **— алгебраический многочлен:**

- **степень которого на единицу меньше максимальной из длин жордановых цепочек, отвечающих собственному значению** λ_j ;
- **и коэффициенты которого зависят от** n **произвольных комплексных постоянных** $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Заметьте, что набор констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$ должен быть *одинаков* для всех многочленов $P_{ij}(t)$.

Конкретно:

Пусть $n = 2$ и λ есть двукратное собственное значение, у которого собственное подпространство одномерное. Тогда общее решение системы (3.1.1) можно представить в виде

$$\|x(t)\| = C_1\|h_{(1)}\|e^{\lambda t} + C_2\left(\|h_{(1)}\|t + \|h_{(2)}\|\right)e^{\lambda t}\ , \tag{3.2.9}$$

где $\|h_{(1)}\|$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ, а $\|h_{(2)}\|$ – присоединенный к нему вектор, найденный по формулам (3.2.2).

Пусть теперь $n = 3$. В случае, когда λ_1 простое и ему отвечает собственный вектор $\|h_{(1)}\|$, а λ_2 двукратное с собственным вектором $\|h_{(2)}\|$ и присоединенным $\|h_{(3)}\|$, формула общего решения такова

$$\|x(t)\| = C_1\|h_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + C_2\|h_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + C_3\left(\|h_{(2)}\|t + \|h_{(3)}\|\right)e^{\lambda_2 t}\ .$$

Если же в трехмерной задаче кратность собственного значения λ равна трем, то возможны два случая.

Или размерность собственного подпространства есть два и жордановых цепочек две, одна из которых состоит лишь из собственного вектора $\|h_{(1)}\|$, а вторая состоит из собственного вектора $\|h_{(2)}\|$ и присоединенного $\|h_{(3)}\|$, тогда решение имеет вид

$$\|x(t)\| = C_1\|h_{(1)}\|e^{\lambda t} + C_2\|h_{(2)}\|e^{\lambda t} + C_3\left(\|h_{(2)}\|t + \|h_{(3)}\|\right)e^{\lambda t}\ .$$

Или же размерность собственного подпространства с собственным вектором $\|h_{(1)}\|$ равна единице, то в единственной жордановой цепочке будут два присоединенных к $\|h_{(1)}\|$ вектора $\|h_{(2)}\|$ и $\|h_{(3)}\|$. Общее решение в этом случае дается формулой

$$\|x(t)\| = \Bigg(C_1\|h_{(1)}\| + C_2\left(\|h_{(1)}\|t + \|h_{(2)}\|\right) +$$

$$+C_3\left(\|h_{(1)}\|\frac{t^2}{2!} + \|h_{(2)}\|\frac{t}{1!} + \|h_{(3)}\|\right)\Bigg)e^{\lambda t}\ .$$

Во всех формулах $C_1,\ C_2$ и C_3 – произвольные комплексные константы.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФ, (СЛУЧАЙ ЖОРДАНОВА БАЗИСА)

Пример 01. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$.

Решение: 1) Матрица системы $\begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{Vmatrix}$. Находим собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, которое задается этой матрицей.

Имеем $\det\begin{Vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{Vmatrix} = 0$ и соответственно

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{12} = 1 \quad k = 2.$$

Собственные векторы находятся из уравнения $\| \hat{A} - \lambda\hat{E} \| \| f \| = \| o \|$ или

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Первое частное решение $\| f \| e^{\lambda t} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} e^{t}$.

2) Линейно независимый собственный вектор здесь *один* и в двумерном пространстве он базиса не образует. Найдем присоединенный вектор. из условия $\| \hat{A} - \lambda\hat{E} \| \| h_{(1)} \| = \| f \|$. Это дает

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

3) Используем табличную формулу $(t\| f \| + \| h_{(1)} \|)e^{\lambda t}$ для построения второй базисной вектор-функции: $(t\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix})e^{t}$.

4) Теперь можно записать общее решение:

$$\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} e^{t} + C_2\,(t\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix})e^{t}.$$

5) Делаем проверку на окончание жордановой цепочки: пытаемся решить уравнение $\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \| \| h_{(2)} \| = \| h_{(1)} \|$. Или $\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow$ система не совместна. О.К.

Пример 02. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$ методом неопределенных коэффициентов.

Решение: 1) Если k - кратность собственного значения λ больше размерности собственного пространства m, то решение, отвечающее этому λ можно искать в виде следующего векторного квазимногочлена с компонентами:

$$x_p(t) = (\alpha_{0p} + \alpha_{1p}t + \ldots + \alpha_{k-m,p}t^{k-m})e^{\lambda t} \quad k = [1, n] \ .$$

Проблема в том, что среди $n(k - m + 1)$ неопределенных коэффициентов должно быть n *независимых*, через которые остальные будут выражаться.

В нашем случае $\lambda = 1,\ k = 2$ и $m = 1$. Поэтому будем искать решения в виде

$$\begin{cases} x(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t)e^t, \\ y(t) = (\beta_0 + \beta_1 t)e^t. \end{cases}$$

2) Подставляем в исходную систему и сокращаем оба равества на экспоненту, получаем:

$$\begin{cases} \beta_1 + (\beta_0 + \beta_1 t) = 3(\beta_0 + \beta_1 t) - (\alpha_0 + \alpha_1 t) \\ \alpha_1 + (\alpha_0 + \alpha_1 t) = 4(\beta_0 + \beta_1 t) - (\alpha_0 + \alpha_1 t) \end{cases}$$

3) Если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях t, то получается

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 = 3\beta_0 - \alpha_0 & \Rightarrow & \beta_1 = 2\beta_0 - \alpha_0 \\ \beta_1 = 3\beta_1 - \alpha_1 & \Rightarrow & \alpha_1 = 2\beta_1 \\ \alpha_0 + \alpha_1 = 4\beta_0 - \alpha_0 & \Rightarrow & \alpha_1 = 4\beta_0 + 2\alpha_0 \\ \alpha_1 = 4\beta_1 - \alpha_1 & \Rightarrow & \alpha_1 = 2\beta_1 \end{cases}$$

Откуда $\begin{cases} \alpha_1 = 2\beta_1 \\ \alpha_0 = 2\beta_0 - \beta_1 \end{cases}$ и

$$\begin{cases} x(t) = (\beta_0 + \beta_1 t)e^t, \\ y(t) = [(2\beta_0 - \beta_1) + 2\beta_1 t]e^t \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x(t) = (\beta_0 + \beta_1 t)e^t, \\ y(t) = [2(\beta_0 + \beta_1 t) - \beta_1 t]e^t. \end{cases}.$$

4) Наконец, в матричном виде находим

$$\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Vmatrix} = \beta_0 \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} e^t + \beta_1 \left(t \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \end{Vmatrix}\right) e^t,$$

где нетрудно заметить, что вектор $\left\| \bar{h}_{(1)} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$ также является присоединенным, т.е., удовлетворяет условию $\left\| \hat{A} - \lambda\hat{E} \right\| \left\| \bar{h}_{(1)} \right\| = \| f \|$.

Отметим, что решение у нас выразилось через две произвольные константы: через β_0 и β_1.

Пример 03. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} = \quad\; -2y - 2z, \\ \dot{y} = 3x + 5y + 3z, \\ \dot{z} = -x - 2y \;\; - z. \end{cases}$

Решение: 1) Характеристическое уравнение имеет вид $\det\begin{Vmatrix} -\lambda & -2 & -2 \\ 3 & 5-\lambda & 3 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{Vmatrix} = 0$.

Или, если вычислить детерминант, то $(\lambda - 1)^2 (\lambda - 2) = 0$.

2) Ищем собственные векторы для $\lambda_1 = 2$. Для этого надо решить систему

$$\begin{Vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Получаем $\| f_{(1)} \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. Следовательно, первая базисная вектор-функция будет иметь вид $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix} e^{2t}$.

3) Ищем собственные векторы для $\lambda_{23} = 1$, решая систему уравнений

$$\begin{Vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Откуда $\| f_{(2)} \| = \begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix}$ и вторая базисная вектор-функция $\begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix} e^t$.

4) Поскольку для $\lambda_{23} = 1$ имеем $k = 2$, а $m = 1$, то базиса из собственных векторов построить не удастся.

Будем искать присоединенный вектор по формуле $\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \| \| h_{(1)} \| = \| f \|$.
Заметим, что основная матрица этой системы та же, что и основная матрица системы в п. 3).

Имеем

$$\begin{Vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

В качестве ее решения - присоединенного вектора можно взять $\|h_{(1)}\| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$.

Согласно табличной формуле $(t\|f_{(2)}\| + \|h_{(1)}\|)e^t$ третья базисная вектор функция будет $(t\begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix})e^t$.

5) В итоге формула общего решения принимает вид:

$$\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ я(t) \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix} e^t + C_3 (t\begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix})e^t$$

Пример 04. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z. \end{cases}$

Решение: 1) Характеристическое уравнение имеет вид $\det\begin{Vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = 0$.

Или, если вычислить детерминант, то $(\lambda - 2)^3 = 0$.

2) Ищем собственные векторы для $\lambda_{1,2,3} = 2$. Для этого надо решить систему

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Получаем $\| f_{(1)} \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. Следовательно, первая базисная вектор-функция будет иметь вид $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} e^{2t}$.

3) Ищем присоединенные векторы, решая систему уравнений

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Откуда $\left\| h_{(1)} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$.

Аналогично

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Откуда $\left\| h_{(2)} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

4) В итоге согласно формуле решения для $k = 3$ с $m = 1$ формула общего решения принимает вид:

$$\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ я(t) \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix} e^{2t} + C_2 \left(t \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}\right) e^{2t} + C_3 \left(\frac{t^2}{2} \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix} + t \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}\right) e^{2t}$$

Пример 05. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y + 2z, \\ \dot{z} = -x - y + 2z. \end{cases}$

Решение: 1) Характеристическое уравнение имеет вид $\det\begin{Vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{Vmatrix} = 0$.

Или, если вычислить детерминант, то $(\lambda - 1)^3 = 0$.

2) Ищем собственные векторы для $\lambda_{1,2,3} = 1$. Для этого надо решить систему Здесь $k = 3$ и $m = 2$.

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 = 0.$$

Получаем $\| f_{(1)} \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $\| f_{(2)} \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

3) Будем искать присоединенный вектор по формуле $\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \| \| h_{(1)} \| = \| f \|$.

Заметим, что основная матрица этой системы та же, что и основная матрица системы в п. 3). Имеем

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} .$$

Тут очевидно, что решений нет.

Попробуем иначе

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Но и тут нет решений. Что же делать?

Дело в том, что жорданова цепочка обязательно начинается с собственного вектора, но, вообще говоря, не с *любого*.

Попытаемся найти подходящий собственный вектор в виде

$$\left\| h_{(1)} \right\| = \alpha \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \beta \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{Vmatrix}.$$

Согласно теореме Кронекера-Капелли для разрешимости системы

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{Vmatrix}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rg} \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = \operatorname{rg} \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 & \alpha+\beta \\ 2 & -2 & -2 & \alpha \\ -1 & 1 & 1 & \beta \end{Vmatrix}$$

что будет иметь место при $\alpha = 2$ и $\beta = -1$.

Значит, надо решать систему

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix}$$

Это дает $\| h_{(1)} \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$

5) В итоге формула общего решения принимает вид:

$$\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix} e^t + C_2 \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} e^t + C_3 \, (t \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix})e^t$$