Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (случай базиса из собственных векторов)

Рассмотрим теперь *однородную* систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| \,. \tag{3.1.1}$$

Свойства ее общего решения – совокупности всех частных решений – описываются следующим набором теорем.

`Теорема 3.1.1 (Принцип суперпозиции)` **Если $\|x_{(1)}(t)\|$ и $\|x_{(2)}(t)\|$ – частные решения системы (3.1.1), то $\|x(t)\| = C_1\|x_{(1)}(t)\| + C_2\|x_{(2)}(t)\|$ также есть ее частное решение для любых комплексных констант C_1 и C_2.**

`Следствие 3.1.1` **Множество всех частных решений однородной системы (3.1.1) образует линейное пространство.**

Предположим теперь, что $\|A\|$ – матрица системы уравнений (3.1.1) – задает в n-мерном унитарном пространстве U^n со стандартным базисом линейный оператор (точнее, линейное преобразование) $\widehat{A}$.

Возникает вопрос: «При каких $\|f\|$ и λ частное нетривиальное решение системы (3.1.1) есть вектор-функция $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$?».

Ответ на него дает

Теорема 3.1.2 **Для того, чтобы вектор-функция $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$ являлась частным ненулевым решением системы (3.1.1), необходимо и достаточно, чтобы $\|f\|$ был собственным вектором, а λ – соответствующим собственным значением линейного преобразования, задаваемого матрицей $\|A\|$ в U^n.**

Доказательство.

Пусть $\|f\|$ некоторый ненулевой столбец. Подставим $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$ в уравнение (3.1.1), приняв во внимание равенство $\dfrac{d}{dt}\, e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$, а также то, что $e^{\lambda t} \neq 0$, получим

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| \;\Leftrightarrow\; \lambda\|f\|e^{\lambda t} = \|A\|\left(\|f\|e^{\lambda t}\right) \;\Leftrightarrow\; \|A\|\|f\| = \lambda\|f\| \,.$$

Теорема доказана.

Напомним также, что ненулевой элемент $f \in U^n$ называется *собственным вектором* оператора $\widehat{A}$, отвечающим *собственному значению* λ, если $\widehat{A}f = \lambda f$. В координатной форме (как показывается в курсе линейной алгебры) последнее равенство будет иметь вид

$$\|\widehat{A}\|\|f\| = \lambda\|f\| \,.$$

Возможный вид общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений устанавливает

Теорема 3.1.3 **Пусть в линейном пространстве U^n существует базис $\{\|f_{(1)}\|, \|f_{(2)}\|, \ldots, \|f_{(n)}\|\}$ из собственных векторов линейного преобразования, задаваемого в исходном базисе матрицей $\|A\|$, и пусть $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ соответствующие этим собственным векторам собственные значения (среди которых могут быть и равные). Тогда**

- $C_1\|f_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + C_2\|f_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n\|f_{(n)}\|e^{\lambda_n t}$, **где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные комплексные числа, является частным решением системы (3.1.1);**
- **и каждое частное решение системы (3.1.1) может быть представлено в виде $C_1\|f_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + C_2\|f_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n\|f_{(n)}\|e^{\lambda_n t}$.**

Следствие 3.1.2 **В условиях теоремы 3.1.3, линейное пространство, образованное всеми частными решениями однородной системы (3.1.1), является n-мерным.**

Таким образом, в тех случаях, когда из собственных векторов линейного преобразования $\widehat{A}$ можно образовать базис в U^n, общее решение системы (3.1.1) определяется теоремой 3.1.3.

В качестве *достаточных* признаков такой возможности удобно использовать следующие, доказываемые в курсе линейной алгебры, критерии.

Из собственных векторов линейного преобразования можно образовать базис в U^n, если

– все собственные значения $\widehat{A}$ попарно различны или;
– матрица $\|\widehat{A}\|$ эрмитовская (т.е., $\alpha_{ji} = \overline{\alpha_{ij}} \quad \forall i, j = [1, n]$) в U^n (или же, в случае E^n, симметрическая).

Использование утверждения теоремы 3.1.3 можно проиллюстрировать следующим примером.

`Задача 3.1.1` Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) - x_2(t). \end{cases}$$

`Решение.` Найдем собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, задаваемого в U^3 матрицей

$$\|\widehat{A}\| = \left\| \begin{array}{rrr} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right\| ,$$

являющейся матрицей данной системы дифференциальных уравнений.
Собственные значения являются корнями характеристического уравнения

$$\det \left\| \begin{array}{rrr} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{array} \right\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \,.$$

Или $\quad (\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0 \,,\quad$ откуда $\quad \lambda_1 = -2,\ \lambda_{2,3} = 1 \,.$

Пусть собственные векторы имеют координатные представления $\|f\| = \|\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\|^{\mathrm{T}}$. Каждый собственный вектор находится из системы линейных уравнений

$$\|\widehat{A} - \lambda\widehat{E}\|\|f\| = \|o\| \ .$$

Для собственного значения $\lambda_1 = -2$ имеем

$$\left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \ , \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 = 0 \ , \end{array} \right.$$

что дает $\|f_{(1)}\| = \| -1\ 1\ 1\|^{\mathrm{T}}$.

Для собственного значения $\lambda_{2,3} = 1$, у которого кратность 2, получаем

$$\left\| \begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \Longrightarrow \left\{ \ \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 0 \ . \right.$$

Откуда $\|f_{(2)}\| = \|1\ 1\ 0\|^{\mathrm{T}}$ и $\|f_{(3)}\| = \|1\ 0\ 1\|^{\mathrm{T}}$.

Легко убедиться, что все три собственных вектора линейно независимые и образуют базис в U^3. Тогда, согласно теореме 3.1.3, общее решение исходной системы может быть записано в виде

$$\left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{matrix} \right\| = C_1 \left\| \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| e^{-2t} + C_2 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| e^{t} + C_3 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| e^{t},$$

Решение получено.

где $C_1,\ C_2$ и C_3 – произвольные комплексные числа.

Если матрица исходной системы уравнений вещественна, то из общего комплексного решения можно выделить вещественные решения при помощи перехода в ЛПЧР к вещественному базису.

Действительно, в этом случае невещественные корни характеристического уравнения попарно комплексно сопряжены. Комплексно сопряженными при этом окажутся и соответствующие пары решений, входящие в базис. Каждую такую пару следует заменить двумя вектор-функциями, являющимися вещественной и мнимой частью одной из вектор-функций исходной пары. То есть процедура этого выделения в точности совпадает с методом, изложенным в § 2.4, за исключением некоторых технических деталей, для иллюстрации которых достаточно рассмотреть конкретный пример.

`Задача 3.1.2` Найти общее вещественное решение системы линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \dot{x}_1(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) & - & x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) & = & x_1(t) & + & x_2(t), & & \\ \dot{x}_3(t) & = & 3x_1(t) & & & + & x_3(t). \end{array}\right.$$

`Решение.` Найдем собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, задаваемого в U^3 матрицей

$$\|\widehat{A}\| = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| .$$

Собственные значения являются корнями характеристического уравнения

$$\det \left\| \begin{matrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{matrix} \right\| = 0 \implies (1-\lambda)^3 + 4(1-\lambda) = 0.$$

Или $(\lambda-1)\left((\lambda-1)^2+4\right) = 0$, откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$.

Пусть собственные векторы имеют координатные представления $\|f\| = \|\xi_1 \ \ \xi_2 \ \ \xi_3\|^{\mathrm{T}}$. Тогда каждый собственный вектор находится из системы линейных уравнений $\|\widehat{A} - \lambda\widehat{E}\|\|f\| = \|o\|$.
Для собственного значения $\lambda_1 = 1$ имеем

$$\left\| \begin{matrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \implies \left\{ \begin{matrix} \xi_2 + \xi_3 = 0 \ , \\ \xi_1 = 0 \ , \end{matrix} \right.$$

что дает $\|f_{(1)}\| = \|0 \ \ 1 \ \ -1\|^{\mathrm{T}}$.

Для $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$ достаточно найти лишь один собственный вектор, например для $\lambda_2 = 1 + 2i$, поскольку другой должен быть ему комплексно сопряженным.

Имеем

$$\left\| \begin{array}{rrr} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \xi_1 - 2i\xi_2 = 0\ . \\ 3\xi_1 - 2i\xi_3 = 0\ . \end{array} \right.$$

Откуда $\|f_{(2)}\| = \|2i\ 1\ \ 3\|^{\mathrm{T}}$ и $\|f_{(3)}\| = \| -2i\ 1\ \ 3\|^{\mathrm{T}}$

Все три собственных вектора линейно независимые (поскольку собственные значения попарно различны) и образуют базис в U^3 . Согласно теореме 3.1.3, общее решение исходной системы может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right\| e^t +$$

$$+ C_2 \left\| \begin{array}{r} 2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1+2i)t} + C_3 \left\| \begin{array}{r} -2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1-2i)t},$$

где $C_1,\ C_2$ и C_3 – произвольные комплексные постоянные.

Пусть $\Phi(t) = \left\| \begin{array}{c} 2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1+2i)t} = \operatorname{Re}\Phi(t) + i\operatorname{Im}\Phi(t)$. Найдем $\operatorname{Re}\Phi(t)$ и $\operatorname{Im}\Phi(t)$. Использовав правила действий с матрицами и формулу Эйлера, получим

$$\Phi(t) = \left(\left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| + i \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \right) e^t \left(\cos 2t + i \sin 2t\right) =$$

$$= \left(\left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^t \cos 2t - \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| e^t \sin 2t \right) +$$

$$+ i \left(\left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^t \sin 2t + \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| e^t \cos 2t \right) .$$

Или, сгруппировав подобные члены, найдем

$$\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t + i \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t ,$$

что дает

$$\mathrm{Re}\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t \quad \text{и} \quad \mathrm{Im}\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t .$$

Теперь общее вещественное решение может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = R_1 \left\| \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right\| e^t +$$

$$+ R_2 \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t + R_3 \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t,$$

`Решение получено.`

где R_1, R_2 и R_3 – произвольные вещественные постоянные.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДУ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Пример 01. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y \end{cases}$ методом исключения.

Решение: 1) Имеем из первого уравнения $y = x - \dot{x}$. Откуда $\dot{y} = \dot{x} - \ddot{x}$.

Тогда из второго уравнения $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$.

2) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3$.
Откуда $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$.

3) Подставляя в это в первое уравнение, получаем

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - (-C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{3t}) = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \quad .$$

4) Итог в матричном виде будет $\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \end{Vmatrix} e^{3t}$.

Пример 02. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y \end{cases}$ методом построения базиса в ЛПЧР.

Решение: 1) Матрица системы $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{Vmatrix}$, поэтому из $\det \begin{Vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = 0$ получаем $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3$.

2) Находим собственные векторы:

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} \quad \text{и}$$

$$\begin{Vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \end{Vmatrix} .$$

3) Откуда, окончательно, $\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \end{Vmatrix} e^{3t}$.

Для того, чтобы из собственных векторов линейного преобразования можно было построить базис, нужно, чтобы для каждого корня характеристического уравнения кратности k имелось k *линейно независимых* собственных векторов. Но это имеет место не всегда: известно (из курса ЛА), что m -максимальное число таких векторов - находится в диапазоне $1 \le m \le k$. На следующих примерах убедимся, что какое бывает.

Сначала рассмотрим тривиальную задачу.

Пример 03. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$ методом построения базиса в ЛПЧР.

Решение: 1) Матрица системы $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, поэтому из $\det \begin{Vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{Vmatrix} = 0$

получаем $\lambda^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{123} = 0, \quad k = 3$.

2) Очевидно, что линейно независимые собственные векторы для $\hat{A}$ суть

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \text{и, кроме того,} \quad e^{\lambda t} = e^{0t} = 1 ,$$

3) Откуда, получим окончательно, что

$$\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Vmatrix}, = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_2 \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_3 \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \forall C_1, C_2, C_3 .$$