

Пример 1. Решить уравнение $y''+y = \frac{1}{\sin x}$.

Решение: 1) $y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ - общее решение однородного.
 2) Частное решение неоднородного ищем в виде $y^*(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$.

3) Функции и находим из системы линейных уравнений

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1' \\ C_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix}.$$

4) Ее решение (некоторое) $\begin{matrix} C_1' = -1 \\ C_2' = \frac{\cos x}{\sin x} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = -x \\ C_2 = \ln|\sin x| \end{matrix}$

Откуда $y^*(x) = -x \cos x + (\ln|\sin x|) \sin x$.

5) Окончательно $y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + (\ln|\sin x|) \sin x$.

Пример 2. Найти вещественные решения уравнения $y''-3y'+2y = \sin x$.

Решение: 1) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, его корни $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.
 Общее решение однородного уравнения $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

2) Заменяя $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, получаем, что $\mu = \pm i$, т.е. резонанса нет. Частное решение неоднородного ищем в виде $y^*(x) = A \cos x + B \sin x$.

3). Используем дополнительные обозначения:

$$\begin{cases} P = A \cos x + B \sin x \\ Q = -A \sin x + B \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{*'} = Q \\ y^{*''} = -P \end{cases} \Rightarrow$$

$$-P - 3Q + 2P = \sin x \Rightarrow P - 3Q = \sin x$$

$$\text{или } A \cos x + B \sin x - 3(-A \sin x + B \cos x) = \sin x \Rightarrow \begin{cases} A - 3B = 0 \\ 3A + B = 1 \end{cases}.$$

Это дает $A = \frac{3}{10}, B = \frac{1}{10}$.

Ответ: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10}(3 \cos x + \sin x)$.

Пример 3. Решить уравнение $y''-4y'+8y = e^{2x} + \sin 2x$.

- Решение: 1) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$, его корни $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$.
Общее решение однородного уравнения $y_0(x) = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x$.
- 2) Заменяя $\sin 2x = \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}$, получаем, что $\mu_1 = 2$ и $\mu_2 = \pm 2i$, т.е. резонанса нет. Частные решения неоднородного ищем в виде $y_1^*(x) = D e^{2x}$ и $y_2^*(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$. Эти неоднородности будем искать независимо друг от друга.
- 3) Для первой неоднородности имеем $D(4 - 8 + 8)e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow D = \frac{1}{4}$. Т.е.
 $y_1^*(x) = \frac{1}{4} e^{2x}$.

4) При поиске второй неоднородности используем *дополнительные обозначения*:

$$\begin{cases} P = A \cos x + B \sin x \\ Q = -A \sin x + B \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{*'} = 2Q \\ y^{*''} = -4P \end{cases} \Rightarrow$$

$$-4P - 8Q + 8P = 0 \Rightarrow 4P - 8Q = \sin 2x$$

$$\text{или } 4A \cos 2x + 4B \sin 2x - 8(-A \sin 2x + B \cos 2x) = \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} 4A - 8B = 0 \\ 8A + 4B = 1 \end{cases}$$

$$\text{Откуда } A = \frac{1}{10}, B = \frac{1}{20}.$$

Ответ: $y(x) = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x + \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{20} (2 \cos 2x + \sin 2x)$.

Пример 4. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

Решение: 1) Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, его корни $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 1$.
Общее решение однородного уравнения $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

2) Здесь есть *резонансный* случай, поскольку $\mu = 1$. Так как кратность резонирующего корня равна единице, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y^*(x) = x(Ax + B)e^x$.

Для удобства вычислений обозначим $D = x(Ax + B)$. Тогда по формуле

$$y^*(x) = D e^x$$

$$\text{Лейбница получим: } y^{*'}(x) = D' e^x + D e^x$$

$$y^{*''}(x) = D'' e^x + 2D' e^x + D e^x$$

Подстановка этих соотношений в исходное неоднородное уравнение дает $(D''e^x + 2D'e^x + De^x) + (D'e^x + De^x) - 2(De^x) = 3xe^x$ или $D'' + 3D' = 3x$.

Но, поскольку $D' = 2Ax + B$, $D'' = 2A$, то $2A + 3(2Ax + B) = 3x$ и, приравняв коэффициенты при равных степенях x в правой и левой частях последнего равенства, получаем $\begin{cases} 6A = 3 \\ 2A + 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)e^x$.

Пример 5: Решить уравнение: $x^3 y'' - 2xy = 6 \ln x$.

Решение:

1) Имеем $x > 0$, поэтому данное уравнение равносильно уравнению $x^2 y'' - 2y = 6 \frac{\ln x}{x}$.

2) Делаем замену: $x = e^t$, то есть $t = \ln x$. При этом имеем $\begin{cases} x = e^t, \\ y(x) = y(e^t) \end{cases}$ и $t'_x = \frac{1}{x}$.

3) Выразим производные y'_x и y''_{xx} через производные y'_t и y''_{tt} .

Имеем: $y'_x = y'_t t'_x = \frac{y'_t}{x}$.

Аналогично:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x}\right)'_x = \frac{(y'_t)'_x \cdot x - y'_t}{x^2} = \frac{y''_{tt} \cdot \frac{1}{x} \cdot x - y'_t}{x^2} = \frac{y''_{tt} - y'_t}{x^2}.$$

5) Тогда уравнение $x^2 y'' - 2y = 6 \frac{\ln x}{x}$ примет вид $x^2 \frac{y''_{tt} - y'_t}{x^2} - 2y = 6te^{-t}$

или $y''_{tt} - y'_t - 2y = 6te^{-t}$.

6) Общее решение однородного находится при помощи характеристического уравнения $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ и имеет вид: $y_0(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$.

7) Частное решение (поскольку есть резонанс) ищется в виде $y^*(t) = t(\alpha t + \beta)e^{-t}$ и оказывается равным $y^*(t) = \left(-t^2 - \frac{2}{3}t\right)e^{-t}$.

8) Возвращаясь к независимой переменной x , получаем общее решение исходного уравнения $y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2 - \frac{1}{x} \left(\ln^2 x + \frac{2}{3} \ln x\right)$.