ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Это уравнения вида: $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1} y' + a_n y = b(x)$, $a_0 \neq 0$. (1)
Здесь a_k - комплексные константы, $b(x)$ - известная непрерывная функция и $y(x)$ - решение n раз непрерывно дифференцируемая искомая функция.

Общее решение неоднородного уравнения (1) имеет вид $y(x) = y_0(x) + y^*(x)$, где $y_0(x)$ - общее решение однородного уравнения, а $y^*(x)$ - произвольное частное решение неоднородного.

Рассмотрим вначале однородное уравнение.

Это уравнение вида: $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1} y' + a_n y = 0$, $a_0 \neq 0$. (2)

Попробуем подобрать его частное решение в виде $y(x) = e^{\lambda x}$, где λ некоторая комплексная константа. Подставляем в (2), получаем

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0 \tag{3}$$

Это - *характеристическое* уравнение. Если у его корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ простые (некратные), то у (2) есть решения вида $y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x}$.

Общий случай. Решение имеет вид $y(x) = \sum_{k=1}^{s} P_k(x) e^{\lambda_k x}$, где $P_k(x)$ алгебраический многочлен от x степени $q_k - 1$ с комплексными коэффициентами C_{k*}, а q_k - кратность корня характеристического уравнения λ_k . В этом случае для $y(x)$ используется термин *квазимногочлен*.

Действительно, если корни ХУ имеют кратность больше единицы, то появление множителя x обусловлено "*внутренним резонансом*". Например,

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 2.$$

В этом случае уравнение можно записать так: $(y'' - y') - (y' - y) = 0 \Rightarrow u' - u = 0$, где $y' - y = u$. Поскольку $u(x) = C_1 e^x$, то для $y(x)$ получаем уравнение с резонансом $y' - y = C_1 e^x$. Откуда $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^x$.

Пример 1: Найти общее решение уравнения $y''+4y'+3y=0$.

Решение: Характеристическое уравнение $\lambda^2+4\lambda+3=0$ имеет корни $\lambda_1=-1, \lambda_2=-3$. Поэтому общее решение будет $y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$.

Пример 2: Найти общее решение уравнения $y'''+3y''+3y'+y=0$.

Решение: Характеристическое уравнение $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$ имеет корни $\lambda_{1,2,3}=-1$. Общее решение будет $y(x)=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x}$.

Пример 3: Найти общее решение уравнения $y''+4y=0$.

Решение: Характеристическое уравнение $\lambda^2+4=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=\pm 2i$. Откуда общее решение : $y(x)=C_1e^{2ix}+C_2e^{-2ix}$.

Иногда требуется найти вещественное решение. Например, в случае (как в примере 3), когда условие задано в вещественной форме. Здесь можно поступить так. Пусть $C_1=\alpha_1+i\beta_1, C_2=\alpha_2+i\beta_2 \quad \alpha,\beta\in R$. Тогда

$$y(x)=(\alpha_1+i\beta_1)(\cos 2x+i\sin 2x)+(\alpha_2+i\beta_2)(\cos 2x-i\sin 2x)=$$
$$=(\alpha_1+\alpha_2)\cos 2x+(-\beta_1+\beta_2)\sin 2x+i(\ldots).$$

Откуда можно заключить, что исходное уравнение имеет вещественные решения вида $y(x)=D_1\cos 2x+D_2\sin 2x$.

В случае, когда все коэффициенты уравнения (2) вещественные, существует более удобная с вычислительной точки зрения процедура выделения вещественных решений. Эта процедура основана на утверждении:

Совокупность *всех* частных решений уравнения (2) является *n-мерным линейным пространством*, базисом в котором служат комплекснозначные функции вида

$$\{e^{\lambda_j x}, xe^{\lambda_j x}, x^2e^{\lambda_j x}, \ldots x^{q_j-1}e^{\lambda_j x}\} \quad \forall j=[1,s],$$

где $\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j \quad j=[1,s]$ - *все* попарно различные корни характеристического уравнения (3), а числа $q_j \; j=[1,s]$ - кратности этих корней.

Можно показать, что, если коэффициенты характеристического уравнения вещественные, то в этом пространстве существует базис, состоящий из *вещественных* функций вида

$$\{e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, \quad xe^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, xe^{\alpha_j x}\sin\beta_j x,, \quad \ldots \quad x^{q_j-1}e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, x^{q_j-1}e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x,\}$$
$\forall j=[1,s]$,

Пример 4: Найти общее решение уравнения $y^{IV} + 4y = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение $\lambda^4 + 4 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \sqrt{2i}$ и $\lambda_{3,4} = \sqrt{-2i}$.

Вначале найдем представление для комплексного числа $\sqrt{i}$ в виде $\alpha + i\beta$.

Имеем $i = 0 + 1i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Тогда

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}} = e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi k)} = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Случай для $\sqrt{-i}$ дает $\sqrt{-i} = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})$.

И для корней характеристического уравнения получаем, после умножения на $\sqrt{2}$

$$\lambda_1 = 1 + i\,,\quad \lambda_2 = 1 - i\,,\quad \lambda_3 = -1 - i\,,\quad \lambda_4 = -1 + i\,,.$$

что дает общее комплекснозначное решение вида:

$$y(x) = C_1 e^{(1+i)x} + C_2 e^{(1-i)x} + C_3 e^{(-1-i)x} + C_4 e^{(-1+i)x}.$$

Откуда вещественное общее решение будет :

$$y(x) = e^x(R_1\cos x + R_2\sin x) + e^{-x}(R_3\cos x + R_4\sin x).$$

Резюмируем выше сказанное.

Для уравнения вида $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1}y' + a_n y = 0\,,\quad a_0 \neq 0$ (1)
достаточно часто возникает задача поиска всех частных решений, являющихся вещественными функциями вещественного аргумента. В общем случае поиск таких решений основан на теореме о том, что если $y(x) = u(x) + iv(x)$ - комплекснозначное частное решение уравнения (1), то *вещественные* функции $u(x)$ и $v(x)$ также являются частными решениями (1). Процедура поиска всех таких функций использует свойство линейности операции дифференцирования в сочетании с условием $\alpha + i\beta \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$.

Однако, если *все* коэффициенты уравнения (1) вещественные, то можно использовать более простую схему выделения вещественного подмножества частных решений этого уравнения.

Эта схема основана на следующих утверждениях:

1) множество всех частных решений уравнения (1) является *линейным n-мерным пространством*,
2) корни характеристического уравнения для (1) вещественны и/или *попарно комплексно сопряжены*, т.е. для каждого комплексного корня вида $\lambda = \alpha + i\beta,\quad \beta \neq 0$ есть корень вида $\lambda = \alpha - i\beta$.

3) набор из n линейно независимых частных решений уравнения (1), образующих базис, содержит в своем составе вещественные функции и/или пары комплексно-значных функций, являющихся *комплексно сопряженными*.

Пусть пара комплексно сопряженных базисных функций имеет вид $g_k(x) = u_k(x) + iv_k(x)$ и $\bar{g}_k(x) = u_k(x) - iv_k(x)$. Тогда можно показать, что пара вещественных функций и линейно независимая и может быть использована при построении базиса в линейном пространстве частных решений уравнения (1).

Если *все* пары функций $g_k(x)$ и $\bar{g}_k(x)$ в базисе заменить на пары функций $u_k(x)$ и $v_k(x)$, то мы получим базис, состоящий *только из* вещественных функций. В этом новом базисе выделение вещественных решений сводится к тривиальной замене комплексных координат на вещественные.

Пример 5: Для уравнения $y^{\mathrm{V}} + 8y''' + 16y' = 0$ найти все вещественные решения.

Решение: В данном случае характеристическое уравнение будет $\lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = 0$.

Откуда $\lambda(\lambda^2+4)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda-2i)^2(\lambda+2i)^2 = 0$. То есть, мы имеем

$$\lambda_1 = 0 \; q_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2i \; q_2 = 2 \quad \lambda_3 = -2i \; q_3 = 2 .$$

В итоге, комплексное решение в смешанном базисе $\{1, e^{2ix}, xe^{2ix}, e^{-2ix}, xe^{-2ix}\}$ будет

$$y(x) = C_1 + (C_2 + C_3x)e^{2ix} + (C_4 + C_5x)e^{-2ix} .$$

Переход к вещественному базису $\{1, \cos 2x, x\cos 2x, \sin 2x, x\sin 2x\}$ дает вещественное решение

$$y(x) = C_1 + (C_2 + C_3x)\cos 2x + (C_4 + C_5x)\sin 2x .$$