А. Е. Умнов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

МОСКВА 2020, верс. 16сен2020г.

Уравнения первого порядка в дифференциалах

Если в уравнении (1.1.1) производную $y'(x)$ представить как отношение дифференциалов переменных y и x, то оно может быть записано в виде $dy - f(x,y)dx = 0$, что позволяет рассматривать уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.4.1}$$

как формальное обобщение линейного уравнения первого порядка (1.1.1).

Определение 1.4.2	Непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\left\| \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\|$, где $t \in \Theta \subseteq R$, называется *частным решением* уравнения (1.4.1), если $\forall\, t \in \Theta$: – $\left\| \begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\| \in \Omega\,;$ – $\lvert x'(t) \rvert + \lvert y'(t) \rvert > 0\,;$ – $P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0\ .$

Соответствующая нтегральная кривая не обязательно является графиком какой-либо функции $y = y(x)$. Она может иметь участки, которые есть графики функции $x = x(y)$. Кроме того, поле направлений уравнения (1.4.1) может содержать векторы, параллельные оси Oy.

Рассмотрим теперь основные методы решения линейных уравнений первого порядка в дифференциалах.

1°. Пусть исходное уравнение представимо в виде

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 \ ,$$

тогда можно применить метод *разделения переменных.*

2°. Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ *однородные степени* k (то есть $P(\alpha x, \alpha y) \equiv \alpha^k P(x,y)$), то можно использовать подстановку вида $y = xu$, которая приведет (как и в задаче 1.2.2) исходное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

3°. Рассмотрим уравнение (1.4.1), добавив к указанным в определении (1.4.1) ограничениям условие непрерывности в области Ω частных производных $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Определение 1.4.3	Дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее вид (1.4.1), называется *уравнением первого порядка в полных дифференциалах*, если существует функция $U(x, y)$, непрерывно дифференцируемая в области Ω такая, что $$dU \equiv P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

В сделанных предположениях очевидно, что все решения уравнения (1.4.1) удовлетворяют равенству $U(x, y) = C$.

Остается только выяснить, при каких условиях на $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ такая функция $U(x, y)$ существует. А если существует, то как ее можно найти?

Необходимым условием существования такой функции является выполнение равенства:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,, \tag{1.4.3}$$

которое, в силу определения 1.4.3 и условия непрерывности вторых частных производных функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, вытекает из

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Нужно отметить, что в случае, когда область Ω является *односвязной*, условие (1.4.3) оказывается *достаточным* для существования функции $U(x, y)$. Соответствующая теорема доказывается в курсе математического анализа.

Задача 1.4.1

Решить уравнение

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0 .$$

Решение. Сначала проверим выполнение условия (1.4.3). Коэффициенты при дифференциалах суть непрерывно дифференцируемые функции на всей координатной плоскости и для них

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y} = \frac{\partial Q}{\partial x} ,$$

то есть данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Система уравнений (1.4.4) в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = e^{-y} , \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = -2y - xe^{-y} . \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы находим, что $U(x,y) = xe^{-y} + C(y)$. Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем

$$-xe^{-y} + C'(y) = -2y - xe^{-y} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad C'(y) = -2y \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad C(y) = -y^2 + K .$$

И, окончательно, из $U(x,y) = xe^{-y} - y^2 + K$ получаем ответ задачи:

$$xe^{-y} - y^2 = C .$$

Решение получено.

4°. Пусть уравнение (1.4.1) таково, что в области Ω

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}\,,$$

то есть данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. В этом случае можно поставить задачу поиска непрерывно дифференцируемой и не равной тождественно нулю в области Ω функции $\mu(x, y)$, такой что

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}\,.$$

Например для уравнения

$$x^2y^3\,dx + (x^3y^2 + x)\,dy = 0$$

– это функция $\mu(x, y) = \dfrac{1}{xy}$, поскольку после умножения на нее, уравнение становится уравнением в полных дифференциалах:

$$xy^2\,dx + x^2y\,dy + \frac{dy}{y} = 0$$

или

$$d\left(\frac{x^2y^2}{2} + \ln|y|\right) = 0.$$

Заметим, что при этом теряются решения исходного уравнения: $x = 0$ и $y = 0$.

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы и не обращаются в ноль одновременно в Ω, то такая функция, называемая *интегрирующим множителем*, существует (всегда!) и удовлетворяет, следующему из (1.4.3), уравнению

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x} - P\frac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu\ . \tag{1.4.5}$$

Уравнение (1.4.5) есть уравнение в частных производных первого порядка и его интегрирование, вообще говоря, более сложная задача, чем поиск решений уравнения (1.4.1).

Однако, поскольку нам требуется лишь какое-нибудь частное решение, то иногда интегрирующий множитель удается найти подбором, опираясь на какие-либо особые свойства или частный вид функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

При этом может оказаться удобным разбить процедуру поиска функции $\mu(x, y)$ на последовательные шаги, каждый из которых состоит в выделении некоторого полного дифференциала или выполнения замены переменных.

Наконец, применяя метод интегрирующего множителя, следует не забывать о том, что уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ и $\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$ не равносильны друг другу и в процессе решения может потребоваться дополнительное исследование.

Проиллюстрируем теперь использование этого метода.

`Задача 1.4.2` Решить уравнение

$$ydx - xdy = 2x^3 \operatorname{tg}\frac{y}{x}\, dx \ .$$

`Решение.` С формальной точки зрения решение данной задачи вполне допустимо описать примерно такой фразой: «Заметим, что в качестве интегрирующего множителя можно взять функцию $\mu(x,y) = -\dfrac{1}{x^2}\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}$, позволяющую преобразовать уравнение к виду $d\ln\left|\sin\dfrac{y}{x}\right| = -dx^2$». Однако процедура решения окажется более прозрачной и понятной, если ее разбить на несколько последовательных шагов.

Вначале в левой части исходного уравнения выделим полный дифференциал от $\dfrac{y}{x}$:

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = 2x\operatorname{tg}\frac{y}{x}\,dx \qquad \text{или} \qquad -d\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{tg}\frac{y}{x}\,dx^2\ .$$

Затем выполним разделение переменных $\dfrac{y}{x}$ и x^2 :

$$\frac{d\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}} = -dx^2\ .$$

Отметим, что на этом этапе мы потеряли решение $y = 0$.

Наконец, пользуясь инвариантностью формы первого дифференциала, получаем:

$$\frac{\cos\dfrac{y}{x}\,d\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\sin\dfrac{y}{x}} = -dx^2 \qquad \text{или} \qquad \frac{d\sin\dfrac{y}{x}}{\sin\dfrac{y}{x}} = -dx^2\ .$$

Откуда

$$d\ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| = d\left(-x^2\right) \qquad \text{или} \qquad \ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| = -x^2 + \ln\tilde{C}\ ,$$

где $\tilde{C} > 0$. Окончательно, с учетом решения $y = 0$, получаем ответ задачи

`Решение получено.`

$$\sin\frac{y}{x} = Ce^{-x^2}\ ,\ \ \forall C\ .$$

Задачу поиска интегрирующего множителя иногда можно упростить, сделав некоторые предположения о его виде. Например, можно попытаться найти интегрирующий множитель среди функций, зависящих только от одной из переменных x или y, или же в виде $\mu\big(f(x,y)\big)$, где $f(x,y)$ некоторая конкретная функция и т.п.

Подобные подходы, как показывает вычислительная практика, весьма редко приводят к желаемому результату. Более эффективными оказываются методы построения интегрирующих множителей, основанные на следующих рассуждениях.

Заметим, что если $\mu(x, y)$ есть интегрирующий множитель уравнения (1.4.1), то есть

$$\mu P dx + \mu Q dy = du(x, y),$$

то интегрирующим множителем для уравнения (1.4.1) будет являться и функция $\mu(x, y)\, F\big(u(x, y)\big)$, где $F(u)$ – произвольная, непрерывно дифференцируемая функция одной переменной. Действительно,

$$\mu F(u)\,(P dx + Q dy) = F(u)\Big(\mu P dx + \mu Q dy\Big) = F(u) du = d\Phi(u)\,,$$

где $\Phi'(u) = F(u)\,.$

Откуда следует, что интегрирующих множителей бесконечно много, и эту неединственность также можно попытаться использовать для построения $\mu(x,y)$. Например, попробуем представить левую часть исходного уравнения в виде

$$(P_1 + P_2)\,dx + (Q_1 + Q_2)\,dy = (P_1 dx + Q_1 dy) + (P_2 dx + Q_2 dy)$$

так, чтобы μ_1 и μ_2 – интегрирующие множители уравнений

$$P_1 dx + Q_1 dy = 0 \qquad \text{и} \qquad P_2 dx + Q_2 dy = 0 \tag{1.4.6}$$

– находились бы сравнительно легко. При этом будут справедливы равенства:

$$\mu_1 P_1\,dx + \mu_1 Q_1\,dy = du_1 \qquad \text{и} \qquad \mu_2 P_2\,dx + \mu_2 Q_2\,dy = du_2.$$

Подберем теперь функции F_1 и F_2 так, чтобы

$$\mu_1 F_1(u_1) \equiv \mu_2 F_2(u_2) = M\,.$$

Решение исходной задачи в этом случае записывается в виде

$$M\,(Pdx + Qdy) = M\,(P_1dx + Q_1dy) + M\,(P_2dx + Q_2dy) =$$

$$= \mu_1 F_1(u_1)\,(P_1dx + Q_1dy) + \mu_2 F_2(u_2)\,(P_2dx + Q_2dy) =$$
$$= F_1(u_1)\,(\mu_1\,(P_1dx + Q_1dy)) + F_2(u_2)\,(\mu_2\,(P_2dx + Q_2dy)) =$$
$$= F_1(u_1)du_1 + F_2(u_2)du_2 = d\,(\Phi_1(u_1) + \Phi_2(u_2)) = 0.$$

Откуда, окончательно

$$\Phi_1\,(u_1(x,y)) + \Phi_2\,(u_2(x,y)) = C\,. \tag{1.4.7}$$

Практическое применение описанного метода иллюстрирует

`Задача 1.4.3` Решить уравнение

$$\left(x^3 - xy^2 - y\right) dx + \left(x^2 y - y^3 + x\right) dy = 0\ .$$

`Решение.` Уравнения (1.4.6) сформируем, отнеся к первому их них слагаемые с первыми степенями независимых переменных и ко второму – слагаемые третьего порядка, получим

$$-ydx+xdy=0 \qquad \text{и} \qquad \left(x^3-xy^2\right)dx+\left(x^2y-y^3\right)dy=0\,.$$

Для первого уравнения имеем

$$-ydx+xdy=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)=0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \mu_1(x,y)=\frac{1}{x^2} \quad \text{и} \quad u_1(x,y)=\frac{y}{x}.$$

Действуя аналогично для второго уравнения, находим

$$\left(x^3-xy^2\right)dx+\left(x^2y-y^3\right)dy=0 \qquad \Longrightarrow$$

$$x^2\left(xdx+ydy\right)-y^2\left(xdx+ydy\right)=0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\left(x^2-y^2\right) d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)=0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \mu_2(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2} \quad \text{и} \quad u_2(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}\,.$$

Теперь подберем функции $F_1(u_1)$ и $F_2(u_2)$ так, чтобы выполнялось равенство $\mu_1 F_1(u_1)=\mu_2 F_2(u_2)$, то есть

$$\frac{1}{x^2}\,F_1\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^2-y^2}\,F_2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad F_1\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1-\dfrac{y^2}{x^2}}\,F_2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\,.$$

Откуда следует, что можно взять, например:

$$F_1\left(u_1\right)=\frac{1}{1-u_1^2} \quad \text{и} \quad F_2\left(u_2\right)\equiv 1\,.$$

Наконец, использовав соотношение (1.4.7), получим

$$d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)+\frac{1}{1-\dfrac{y^2}{x^2}}\,d\left(\frac{y}{x}\right)=0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad d\left(\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}\right|\right)=0\,.$$

В итоге получаем решения в виде

$$\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}\right|=C\,.$$

Завершая процедуру решения задачи, обратим внимание на то, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ исходного уравнения определены на всей плоскости E^2, а использованные интегрирующие множители – нет. Поэтому следует проверить, не являются ли решениями $x = 0$ и $y = \pm x$. Непосредственная проверка показывает, что $y = \pm x$ суть также решения.

`Решение получено.`

Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

Рассмотрим теперь методы решения уравнений 1-го порядка, не разрешенных относительно производной. Эти уравнения согласно формуле (0.1.3) при $n = 1$ и определению (0.1.4) записываются в виде

$$F\,(x, y, y') = 0\ , \tag{1.5.1}$$

где $F(x, y, z)$ – известная функция от трех переменных, непрерывная в непустой области $\Omega \subseteq E^3$, а $y(x)$ – искомая функция от $x \in X$.

В рамках этого параграфа условимся обозначать «штрихом» дифференцирование по переменной x, а «верхней точкой» дифференцирование по t.

Для дальнейших рассуждений оказывается удобным

Определение 1.5.1	Вектор-функция $$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \in \Theta \qquad (1.5.2)$$ называется *частным решением в параметрической форме* дифференциального уравнения (1.5.1), если $\forall t \in \Theta$: – $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы ;
	– $\varphi(t) \in X$, $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ и $\left\Vert \begin{matrix} \varphi(t) & \psi(t) & \dfrac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} \end{matrix} \right\Vert^{\mathrm{T}} \in \Omega$; – $F\left(\varphi(t),\ \psi(t),\ \dfrac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}\right) = 0$.

Отметим, что в этом определении (по сравнению с определением (1.4.2)) неравенство $|\dot{\varphi}(t)|+|\dot{\psi}(t)| > 0$ заменено более жестким условием $\dot{\varphi}(t) \neq 0$, гарантирующем существование функции $y(x)$ $\forall x \in X$. При этом интегральной кривой является график частного решения $y(x)$, заданного параметрически вектор-функцией (1.5.2).

Для решения уравнения (1.5.1) в общем случае можно применить *метод введения параметра*, состоящего в замене $y' = p$ с последующим решением алгебраическо-дифференциальной системы уравнений:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ dy = p\, dx. \end{cases} \tag{1.5.3}$$

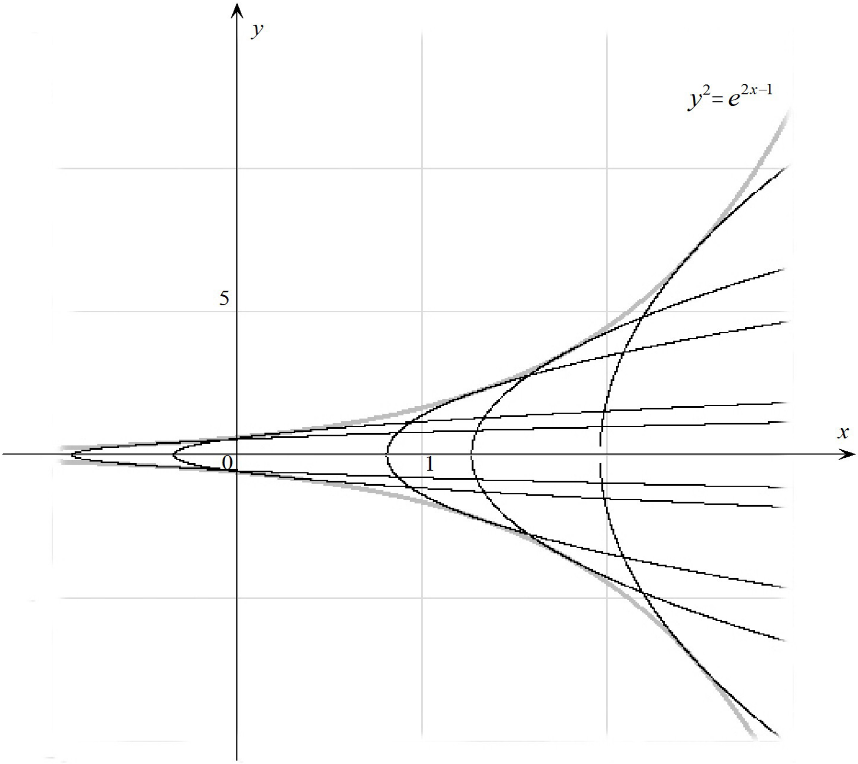

Рис. 1. Интегральные кривые для уравнения в задаче 1.5.1

Задача 1.5.1 Решить уравнение

$$2xy' - y = y' \ln yy' \ .$$

Решение. Исходное уравнение можно привести к виду

$$xu' - u = \frac{u'}{2} \ln \frac{u'}{2}$$

умножением обеих его частей на y с последующей заменой $u = y^2$. А поскольку $y = 0$ не является решением, то новое уравнение равносильно исходному.

Полученное уравнение есть, так называемое *уравнение Клеро*, решение которого можно найти в справочниках. Однако мы воспользуемся не информационным ресурсом, а изложенной выше схемой.

Разрешая это уравнение относительно u и полагая $u' = p$, получаем систему (1.5.3) в виде

$$\begin{cases} u = xp - \dfrac{p}{2} \ln \dfrac{p}{2}\,, \\ du = p\,dx\,. \end{cases} \tag{1.5.6}$$

Дифференцируя первое уравнение по x и подставляя в него $u' = p$, получаем

$$p' \left(x - \frac{1}{2} \ln \frac{p}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0\,.$$

Теперь, либо

$$p' = 0 \quad \Longrightarrow \quad p = C \;\; \forall C > 0 \qquad \text{и из (1.5.6)} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u = Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2} \quad \Longrightarrow \quad y^2 = Cx - \frac{C}{2} \ln \frac{C}{2}\,,$$

либо

$$x - \frac{1}{2} \ln \frac{p}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad p = 2e^{2x-1}\,,$$

Решение получено. что, в свою очередь, при подстановке в *первое* уравнение системы (1.5.6), дает $y^2 = e^{2x-1}$.

Интегральные кривые частных решений уравнения в задаче 1.5.1 показаны на рис. 1.4. По поводу их вида можно сделать следующие замечания.

Во-первых, кроме решений определяемых полученными формулами, как уже указывалось ранее, имеются и «составные» решения, образуемые объединением подходящих фрагментов «формульных» решений.

Во-вторых, среди интегральных кривых могут иметься как пересекающиеся, так и касающиеся друг друга. Условия их существования и другие свойства будут рассмотрены позднее в § 4.6. Сейчас лишь отметим, что решения, через каждую точку интегральной кривой которых проходит интегральная кривая другого решения так, что обе интегральные кривые в точке пересечения имеют общую касательную, принято называть *особыми.*

Тот факт, что для уравнений вида (1.5.1) упорядоченная пара чисел $\{x_0;\ y_0\}$ может вовсе не определять или же определять неоднозначно (даже локально!) частное решение таких уравнений, приводит к необходимости изменения постановки задачи Коши для уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной.

Определение 1.5.2 Задача Коши для уравнения $F(x,y,y')=0$ формулируется так: найти $y(x)$, при условиях:

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0\ , \\ y'(x_0)=p_0\ , \\ F(x_0,y_0,p_0)=0\ . \end{cases} \tag{1.5.7}$$

При этом тройка чисел $\|\ x_0\ y_0\ p_0\ \|^{\mathrm{T}} \in \Omega \subseteq E^3$ называется *начальными условиями задачи Коши.*

Число интегральных кривых, проходящих через заданную точку координатной плоскости Oxy зависит от числа решений уравнения $F(x_0,y_0,p)=0$. Может оказаться, что через эту точку не проходит ни одна интегральная кривая, а может оказаться – что больше, чем одна. Отметим еще раз, что единственность решения данного уравнения не гарантирует единственности решения соответствующей задачи Коши, поскольку возможен случай, когда через одну точку плоскости проходят две *различные* интегральные кривые, имеющие в этой точке общую касательную. Все эти случаи демонстрирует рис. 1.4.

0.1. О методах понижения порядка уравнения и других специальных алгоритмах

Проблемы существования и единственности решений возникают и в случае нелинейных уравнений порядка более высокого, чем первый. Поэтому представляется полезным рассмотрение специальных методов *понижения порядка*, позволяющих упрощать подобные уравнения и использовать методы рассмотренные нами ранее. Рассмотрим некоторые из них.

Порядок уравнения вида $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ может быть понижен, если

1°. Левая часть исходного уравнения не содержит неизвестной функции и ее производных до $(k-1)$-го порядка включительно $1 \le k \le n$. То есть уравнение имеет вид

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0\ .$$

В этом случае за новую неизвестную функцию принимаем $u(x) = y^{(k)}(x)$, тогда:

$$y^{(k+1)}(x) = u'(x),\ \ldots\ , y^{(n)}(x) = u^{(n-k)}(x).$$

Порядок уравнения понизился до $n-k$.

2°. Формулировка уравнения не содержит независимой переменной. Это значит, что мы имеем уравнение вида

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\ .$$

Приняв за новую независимую переменную y, а за новую искомую функцию $y'(x) = u(y)$, и учитывая, что

$$y'(x) = u, \qquad y''_{xx}(x) = u'_x(x) = u'_y \cdot y'(x) = u'_y u, \qquad \ldots\ ,$$

понижаем порядок уравнения на единицу.

3°. Исходное уравнение является однородным относительно искомой функции и ее производных, то есть не меняется, если каждую из них умножить на $k > 0$. Порядок уравнения понизится на единицу при замене

$$y' = yu, \qquad y'' = y'u + yu' = yu^2 + yu', \qquad \ldots\ .$$

4°. Исходное уравнение таково (или же приводится к такому виду), что его левая часть является полной производной некоторого порядка. Этот метод поясним следующим примером.

`Задача 1.6.1` Понизить порядок уравнения $y'' + y = 0$.

`Решение.` Умножив обе части этого уравнения на y', получим

$$y'y'' + yy' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{1}{2}\,y'^2\right)' + \left(\frac{1}{2}\,y^2\right)' = 0$$

или $\left(y'^2 + y^2\right)' = 0$.

Откуда приходим к уравнению первого порядка

$$y'^2 + y^2 = C^2 \ ,$$

где C есть произвольная константа. Легко видеть, что у него имеются решения $y(x) = C \neq 0$, являющиеся *посторонними* для исходного уравнения.

Отметим, что для решения этой задачи можно использовать и метод 2°. Действительно, сделав замену $y' = u$, при которой $y'' = u'_y u$, мы получим

$$u'_y u + y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u\,du + y\,dy = 0.$$

Откуда следует, что

$$d\left(\frac{u^2 + y^2}{2}\right) = 0 \quad \text{или, окончательно,} \quad y'^2 + y^2 = C^2 \ .$$

`Решение получено.`

Иногда общее решение дифференциального уравнения удается найти, если известно какое-нибудь частное решение. К таким случаям относятся методы, основанные на использовании формулы Лиувилля–Остроградского, которые будут рассмотрены позднее в §§ 5.2–5.3.

Другим примером возможности применения такого подхода служит *уравнение Риккати*

$$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x), \tag{1.6.1}$$

где $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ заданные функции, непрерывные на некотором интервале (α, β).

В случае, когда известно, что уравнение (1.6.1) имеет частное решение $y_0(x)$, его общее решение определяется формулой

$$y(x) = u(x) + y_0(x),$$

где $u(x)$ есть общее решение уравнения Бернулли

$$u' = \Big(2A(x)y_0(x) + B(x)\Big)u + A(x)u^2\,.$$

В справедливости данного утверждения убедитесь самостоятельно.

В общем случае уравнение (1.6.1) не интегрируется в квадратурах, примером чего может служить (упомянутое в § 1.1) *специальное уравнение Риккати* $y' = y^2 + x$.

Наконец, следует иметь в виду, что описанные выше случаи суть условия, при которых оказывается возможным понижение порядка, лишь достаточные, но не необходимые. Это иллюстрирует уравнение

$$y(y'' + y') - (y')^2(xy^2 - 1) = 0\,.$$

Здесь нет однородности и явно присутствует x в записи условия. Тем не менее, замена $u(x) = y(x)y'(x)$ преобразует это уравнение в уравнение первого порядка (конкретно, в уравнение Бернулли) вида

$$u' + u = xu^2\,.$$