

Линии и поверхности на плоскости и в пространстве

Пусть дана система координат $\{\vec{O}, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости и числовое множество Ω , являющееся промежутком (возможно, бесконечным).

Будем говорить, что линия L на плоскости задана *параметрически* вектор-функцией $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ (или в координатной форме

$$\left\| \begin{array}{c} \vec{r} \\ \vec{r} \end{array} \right\|_g = \left\| \begin{array}{c} F_x(\tau) \\ F_y(\tau) \end{array} \right\|,$$

где $F_x(\tau), F_y(\tau)$ – непрерывные, скалярные функции аргумента τ , определенные для $\tau \in \Omega$), если

- 1) для любого $\tau \in \Omega$ точка $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ лежит на L ;
- 2) для любой точки \vec{r}_0 , лежащей на L , существует $\tau_0 \in \Omega$, такое, что выполнено равенство $\vec{r}_0 = \vec{F}(\tau_0)$.

Иногда линия на плоскости задается в виде уравнения $G(x,y) = 0$, которое получается исключением параметра τ из системы уравнений
$$\begin{cases} x = F_x(\tau) \\ y = F_y(\tau) \end{cases}, \quad \tau \in \Omega.$$

1°. Прямая линия, например, задается вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$, где \vec{a} – направляющий вектор, а \vec{r}_0 – одна из точек этой прямой. Скалярная форма задания прямой в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x, \\ y = y_0 + \tau a_y, \end{cases} \quad \tau \in (-\infty, +\infty),$$

то есть
$$\begin{cases} F_x(\tau) = x_0 + \tau a_x, \\ F_y(\tau) = y_0 + \tau a_y, \end{cases} \quad \tau \in (-\infty, +\infty),$$

или $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$, где $G(x,y) = Ax + By + C$.

2°. В декартовой ортонормированной системе координат окружность радиуса R с центром в точке $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ в параметрическом виде может быть задана как

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos \tau, \\ y = y_0 + R \sin \tau, \end{cases} \quad \tau \in [0, 2\pi), \text{ то есть}$$

$$\begin{cases} F_x(\tau) = x_0 + R \cos \tau, \\ F_y(\tau) = y_0 + R \sin \tau, \end{cases} \quad \tau \in [0, 2\pi),$$

или же уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

$$\text{где } G(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2.$$

Линия называется *алгебраической*, если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид $\sum_{k=0}^m \alpha_k x^{p_k} y^{q_k} = 0$, где p_k и q_k – целые неотрицательные числа, а числа α_k не равны нулю одновременно.

Число $N = \max_{k \in [0, m]} \{p_k + q_k\}$ называется *порядком алгебраического уравнения*, указанного в определении 4.1.2, где максимум находится по всем k , для которых $\alpha_k \neq 0$. *Наименьший* из порядков алгебраических уравнений, задающих данную алгебраическую линию, называется *порядком алгебраической линии*.

<i>Прямая</i>	$x + 3y + 2 = 0$	$(N = 1)$
<i>Квадратная парабола</i>	$y - x^2 = 0$	$(N = 2)$
<i>Гипербола</i>	$xy - 1 = 0$	$(N = 2)$
<i>“Декартов лист”</i>	$x^3 + y^3 - xy = 0$	$(N = 3)$

Теорема **Порядок алгебраической линии не зависит от выбора системы координат.**

Доказательство.

Пусть алгебраическая линия L имеет в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ уравнение $G(x, y) = 0$ и порядок N . Перейдем к системе координат $\{O, \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$. Формулы перехода имеют вид

$$\begin{cases} x = \sigma_{11}x' + \sigma_{12}y' + \beta_1, \\ y = \sigma_{21}x' + \sigma_{22}y' + \beta_2, \end{cases}$$

поэтому уравнение линии L в “новой” системе координат будет

$$G(\sigma_{11}x' + \sigma_{12}y' + \beta_1, \sigma_{21}x' + \sigma_{22}y' + \beta_2) = 0.$$

Отсюда следует, что $N \geq N'$, то есть при переходе к “новой” системе координат порядок алгебраической кривой не может повыситься. Применяя аналогичные рассуждения для обратного перехода от системы координат $\{O, \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$ к системе $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$, получим $N \leq N'$ и окончательно $N = N'$.

Теорема доказана.

Фигуры на плоскости можно задавать, используя ограничения типа неравенств.

1°. В ортонормированной системе координат набор условий
$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases} \quad \text{за-}$$
дает прямоугольный равнобедренный треугольник, катеты которого лежат на осях координат и имеют длины 3.

2°. В ортонормированной системе координат неравенство вида $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$ определяет круг радиуса 2 с центром в начале координат.

Рассмотрим теперь случай линии в пространстве.

Пусть дана пространственная система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Будем говорить, что линия L в пространстве задана *параметрически* вектор-функцией $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ (или в координатной форме

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} F_x(\tau) \\ F_y(\tau) \\ F_z(\tau) \end{cases},$$

где $F_x(\tau), F_y(\tau), F_z(\tau)$ – непрерывные, скалярные функции от τ , определенные для $\tau \in \Omega$), если

- 1) для любого $\tau \in \Omega$ точка $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ лежит на L ,
- 2) для любой точки \vec{r}_0 , лежащей на L , существует $\tau_0 \in \Omega$, такое, что выполнено равенство $\vec{r}_0 = \vec{F}(\tau_0)$.

Иногда линия в пространстве задается системой уравнений

$$\begin{cases} G(x, y, z) = 0, \\ H(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

которая получается исключением параметра τ из соотношений

$$\begin{cases} x = F_x(\tau), \\ y = F_y(\tau), \\ z = F_z(\tau), \end{cases} \quad \tau \in \Omega,$$

или же равносильным уравнением, например, вида

$$G^2(x, y, z) + H^2(x, y, z) = 0.$$

1°. В декартовой системе координат алгебраическая линия второго порядка $x^2 + y^2 = 0 \quad \forall z$ является *прямой*.

2°. В ортонормированной системе координат *винтовая линия* радиуса R с шагом $2\pi a$ может быть задана в следующем параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = R \cos \tau, \\ y = R \sin \tau, \tau \in (-\infty, +\infty), \\ z = a\tau \end{cases}$$

$$\text{или же } \begin{cases} x = R \cos \frac{z}{a}, \\ y = R \sin \frac{z}{a}. \end{cases}$$

Поверхности в пространстве

Пусть имеется пространственная система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и Ω – множество упорядоченных пар чисел φ, θ , заданное условиями: $\alpha \leq \varphi \leq \beta, \gamma \leq \theta \leq \delta$.

Будем говорить, что в пространстве поверхность S задана *параметрически* вектор-функцией

$$\vec{r} = \vec{F}(\varphi, \theta) \text{ (или в координатной форме)}$$

$$\left\| \vec{r} \right\|_g = \left\| \begin{array}{c} F_x(\varphi, \theta) \\ F_y(\varphi, \theta) \\ F_z(\varphi, \theta) \end{array} \right\|,$$

где $F_x(\varphi, \theta), F_y(\varphi, \theta), F_z(\varphi, \theta)$ – непрерывные скалярные функции двух аргументов φ, θ , определенные для $\varphi, \theta \in \Omega$, если

- 1) для любой упорядоченной пары чисел $\varphi, \theta \in \Omega$ точка $\vec{r} = \vec{F}(\varphi, \theta)$ лежит на S ,
- 2) для любой точки \vec{r}_0 , лежащей на S , существует упорядоченная пара чисел $\varphi_0, \theta_0 \in \Omega$, таких, что выполнено равенство $\vec{r}_0 = \vec{F}(\varphi_0, \theta_0)$.

Иногда поверхность в пространстве задается в виде уравнения $G(x, y, z) = 0$, которое получается исключением φ и θ из системы уравнений

$$\begin{cases} x = F_x(\varphi, \theta), \\ y = F_y(\varphi, \theta), \\ z = F_z(\varphi, \theta). \end{cases} \varphi, \theta \in \Omega.$$

В ортонормированной системе координат *сфера* радиуса R с центром в точке $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ может быть параметрически задана в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos \varphi \sin \theta, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ y = y_0 + R \sin \varphi \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ z = z_0 + R \cos \theta, \end{cases}$$

а ее уравнение в координатах

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 .$$

Поверхность называется *алгебраической*, если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид $\sum_{k=0}^m \alpha_k x^{p_k} y^{q_k} z^{r_k} = 0$, где p_k, q_k и r_k – целые неотрицательные числа, а числа α_k не равны нулю одновременно.

Число $N = \max_{k \in [0, m]} \{p_k + q_k + r_k\}$ называется *порядком алгебраического уравнения*, (указанного в определении 4.2.2), где максимум находится по всем k , для которых $\alpha_k \neq 0$. *Наименьший* из порядков алгебраических уравнений, задающих данную алгебраическую поверхность, называется *порядком алгебраической поверхности*.

Прямой круговой цилиндр

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (N = 2)$$

Сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (N = 2)$$

Теорема **Порядок алгебраической поверхности не зависит от выбора системы координат.**