Базис. Координаты вектора в базисе

Определение 1.5.1.	*Базисом на прямой* называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой. *Базисом на плоскости* называется любая упорядоченная пара линейно независимых векторов, принадлежащих этой плоскости. *Базисом в пространстве* называется любая упорядоченная тройка линейно независимых векторов.
Определение 1.5.2.	Базис называется *ортогональным*, если образующие его векторы попарно ортогональны (взаимно перпендикулярны).
Определение 1.5.3.	Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если образующие его векторы имеют единичную длину.

Теорема 1.5.1.

Пусть дан базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, тогда любой вектор $\vec{x}$ в пространстве может быть представлен и притом единственным образом в виде

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 \,,$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 – некоторые числа.

Определение 1.5.4.

Числа ξ_1, ξ_2, ξ_3 – коэффициенты в *разложении* $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ – называются *координатами* (или *компонентами*) вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, которые принято записывать в виде столбца $\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\|$, называемым *координатным столбцом* или *координатным представлением* вектора.

Действия с векторами в координатном представлении

Правила действий с векторами в координатной форме совпадают с правилами соответствующих операций с матрицами.

Имеет место

Теорема 1.6.1. **В координатном представлении операции с векторами выполняются следующим образом:**

1°. ***Сравнение векторов*** **Два вектора**

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$$

и $$\vec{y} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$$

равны тогда и только тогда, когда равны их координатные представления:

$$\left\| \vec{x} \right\|_g = \left\| \vec{y} \right\|_g \quad \textbf{или} \quad \begin{cases} \xi_1 = \eta_1 \\ \xi_2 = \eta_2 \\ \xi_3 = \eta_3 \end{cases}.$$

2°. ***Сложение векторов***

Координатное представление суммы двух векторов

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$$

и $$\vec{y} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$$

равно сумме координатных представлений слагаемых

$$\left\| \vec{x} + \vec{y} \right\|_g = \left\| \vec{x} \right\|_g + \left\| \vec{y} \right\|_g .$$

3°. ***Умножение векторов на число***

Координатное представление произведения числа λ **на вектор**

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$$

равно произведению числа λ **на координатное представление вектора** $\vec{x}$**:**

$$\left\| \lambda \vec{x} \right\|_g = \lambda \left\| \vec{x} \right\|_g .$$

Доказательство.

Рассмотрим правило сложения векторов в координатной форме.

$$\left\| \vec{x} + \vec{y} \right\|_g = \left\| (\xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3) + (\eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3) \right\|_g =$$

$$= \left\| (\xi_1 + \eta_1) \vec{g}_1 + (\xi_2 + \eta_2) \vec{g}_2 + (\xi_3 + \eta_3) \vec{g}_3 \right\|_g =$$

$$= \begin{Vmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \xi_3 + \eta_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \left\| \vec{x} \right\|_g + \left\| \vec{y} \right\|_g .$$

Теорема доказана.

Следствие 1.6.1. **Координатное представление линейной комбинации $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}$ является той же линейной комбинацией координатных представлений векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:**

$$\begin{Vmatrix} \lambda\xi_1 + \mu\eta_1 \\ \lambda\xi_2 + \mu\eta_2 \\ \lambda\xi_3 + \mu\eta_3 \end{Vmatrix} = \lambda \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} + \mu \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} .$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как в координатном представлении записываются условия линейной зависимости и независимости векторов.

Теорема 1.6.2. **Для того чтобы два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ на плоскости были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их координатные представления $\left\|\vec{x}\right\|_g = \left\|\begin{matrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{matrix}\right\|$ и $\left\|\vec{y}\right\|_g = \left\|\begin{matrix}\eta_1 \\ \eta_2\end{matrix}\right\|$ удовлетворяли условию**

$$\det\left\|\begin{matrix}\xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2\end{matrix}\right\| = 0.$$

Теорема 1.6.3. **Для того чтобы три вектора в пространстве $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ с координатными представлениями**

$$\left\|\vec{x}\right\|_g = \left\|\begin{matrix}\xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3\end{matrix}\right\|, \quad \left\|\vec{y}\right\|_g = \left\|\begin{matrix}\eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3\end{matrix}\right\| \quad \text{и} \quad \left\|\vec{z}\right\|_g = \left\|\begin{matrix}\kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3\end{matrix}\right\|$$

были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их координаты удовлетворяли условию

$$\det\left\|\begin{matrix}\xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3\end{matrix}\right\| = 0.$$

Задача 1.6.1. *1) Будут ли линейно зависимыми столбцы*

$$\left\|\begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}1\\-1\\1\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}2\\2\\0\end{matrix}\right\|?$$

(Отв. Нет)

2) При каких значениях параметра a *будут линейно зависимыми столбцы*

$$\left\|\begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}1\\-1\\1\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}2\\2\\a\end{matrix}\right\|?$$

(Отв. При $a=1$*)*

Декартова система координат

Определение 1.7.1.	Совокупность базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и точки O, в которую помещены начала всех базисных векторов, называется *общей декартовой системой координат* и обозначается $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.
Определение 1.7.2.	Система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, порождаемая ортонормированным базисом, называется *нормальной прямоугольной* (или *ортонормированной*) системой координат.

Если задана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, то произвольной точке M в пространстве можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор $\vec{r}$, начало которого находится в точке O, а конец – в точке M.

Определение 1.7.3.	Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.
Определение 1.7.4.	Координаты радиуса-вектора точки M называются *координатами точки* M в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Изменение координат при замене базиса и начала координат

Пусть даны две декартовы системы координат: “старая” $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и “новая” $\{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$ (рис. 1.8.1). Выразим векторы “нового” базиса, а также вектор $\vec{OO'}$ через векторы “старого” базиса. В силу теоремы 1.5.1 это можно сделать всегда и притом единственным образом:

$$\begin{aligned} \vec{g}'_1 &= \sigma_{11}\vec{g}_1 + \sigma_{21}\vec{g}_2 + \sigma_{31}\vec{g}_3, \\ \vec{g}'_2 &= \sigma_{12}\vec{g}_1 + \sigma_{22}\vec{g}_2 + \sigma_{32}\vec{g}_3, \\ \vec{g}'_3 &= \sigma_{13}\vec{g}_1 + \sigma_{23}\vec{g}_2 + \sigma_{33}\vec{g}_3, \\ \vec{OO'} &= \beta_1\vec{g}_1 + \beta_2\vec{g}_2 + \beta_3\vec{g}_3. \end{aligned} \tag{1.8.1}$$

Тогда справедлива

Теорема 1.8.1. **Координаты произвольной точки в “старой” системе координат связаны с ее координатами в “новой” соотношениями**

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sigma_{11}\xi'_1 + \sigma_{12}\xi'_2 + \sigma_{13}\xi'_3 + \beta_1, \\ \xi_2 &= \sigma_{21}\xi'_1 + \sigma_{22}\xi'_2 + \sigma_{23}\xi'_3 + \beta_2, \\ \xi_3 &= \sigma_{31}\xi'_1 + \sigma_{32}\xi'_2 + \sigma_{33}\xi'_3 + \beta_3. \end{aligned} \tag{1.8.2}$$

Определение 1.8.1. Формулы (1.8.2) называются *формулами перехода* от системы координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ к системе координат $\{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$.

Определение 1.8.2. Матрица $\|S\| = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Vmatrix}$ называется *матрицей перехода* от базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ к базису $\{\vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$.

Теорема 1.8.2. **Для матрицы перехода**

$$\det \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Задача 1.6.2. *Записать формулы прямого и обратного перехода для двух декартовых систем координат, показанных на рис. 02.04.01.*

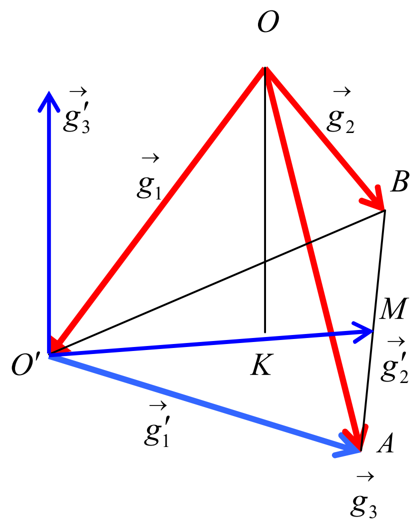


Рис. 1.6.2.

Решение

Найдем формулы перехода от системы координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ к $\{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$.
Имеем из рис. 02.04.01. $\overrightarrow{OO'} = \vec{g}_1$. А для "новых" базисных векторов

$$\vec{g}'_1 = -\vec{g}_1 + \vec{g}_3$$

$$\vec{g}'_2 = -\vec{g}_1 + \frac{\vec{g}_2 + \vec{g}_3}{2}$$

$$\vec{g}'_3 = -\vec{g}_1 + \overrightarrow{O'K} = -\vec{g}_1 - \frac{2}{3}\vec{g}'_2 = -\frac{1}{3}\vec{g}_1 - \frac{1}{3}\vec{g}_2 - \frac{1}{3}\vec{g}_3 .$$

Записав в виде столбцов найденные координатные разложения "новых" базисных векторов по "старым", получим *матрицу перехода*

$$\| S \| = \left\| \begin{matrix} -1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{matrix} \right\| ,$$

определитель которой равен $\frac{1}{2}$. Теперь записываем формулы *прямого перехода*

$$\begin{cases} \xi_1 = -\xi'_1 - \xi'_2 - \frac{1}{3}\xi'_3 + 1 \\ \xi_2 = \frac{1}{2}\xi'_2 - \frac{1}{3}\xi'_3 \\ \xi_3 = \xi'_1 + \frac{1}{2}\xi'_2 - \frac{1}{3}\xi'_3 \end{cases} .$$

Найдем теперь формулы *обратного перехода*. Для этого сначала выразим векторы "старого" базиса через векторы "нового".

$$\vec{g}_1 = -\frac{2}{3}\vec{g}'_2 - \vec{g}'_3$$

$$\vec{g}_2 = \vec{OM} + \vec{MB} = (\vec{KM} - \vec{g}'_3) + (\vec{g}'_2 - \vec{g}'_1) = -\vec{g}'_1 + \frac{4}{3}\vec{g}'_2 - \vec{g}'_3$$

$$\vec{g}_3 = \vec{g}_1 + \vec{g}'_1 = \vec{g}'_1 - \frac{2}{3}\vec{g}'_2 - \vec{g}'_3 .$$

Тогда матрица обратного перехода будет иметь вид

$$\| T \| = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -1 & -1 \end{matrix} \right\| ,$$

причем $\det\| T \| = 2$. Наконец, формулы обратного перехода будут

$$\begin{cases} \xi'_1 = & & -\xi_2 & +\xi_3 & \\ \xi'_2 = & -\frac{2}{3}\xi_1 & +\frac{4}{3}\xi_2 & -\frac{2}{3}\xi_3 & +\frac{2}{3} \\ \xi'_3 = & -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & +1 \end{cases}$$

так как $\vec{O'O} = -\vec{g}_1 = \frac{2}{3}\vec{g}'_2 + \vec{g}'_3$.

Решение получено

Формулы перехода между ортонормированными системами координат на плоскости

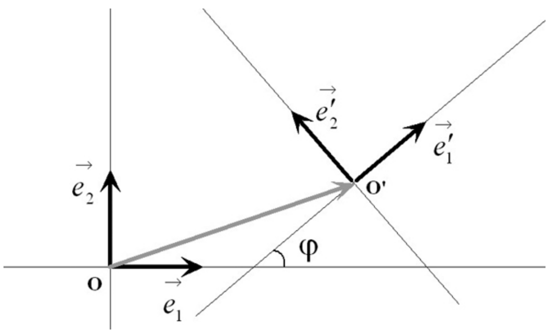
Рассмотрим две ортонормированные системы координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ и $\{O',\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2\}$. Получим формулы перехода для случая, показанного на рис. 1.8.3. Из геометрически очевидных соотношений

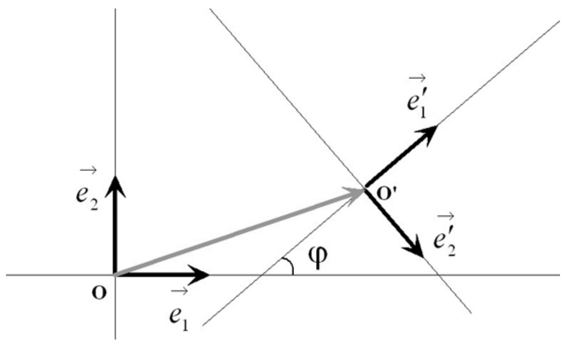
$$\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1\cos\varphi + \vec{e}_2\sin\varphi \quad \text{и} \quad \vec{e}\,'_2 = -\vec{e}_1\sin\varphi + \vec{e}_2\cos\varphi$$

получаем матрицу перехода: $\|S\| = \left\| \begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix} \right\|$,

и если $\overrightarrow{OO'} = \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\|$,то “старые” координаты будут связаны с “новыми” как

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi'_1\cos\varphi - \xi'_2\sin\varphi + \beta_1, \\ \xi_2 = \xi'_1\sin\varphi + \xi'_2\cos\varphi + \beta_2. \end{cases}$$





Во первом случае обе системы координат удается совместить последовательным выполнением параллельного переноса “старой” системы на вектор $\vec{OO'}$ и поворота на угол φ вокруг точки O'.

Иногда, после совмещения векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}\,'_1$, еще потребуется отражение вектора $\vec{e}_2$ симметрично относительно прямой, проходящей через совмещенные векторы. Формулы перехода будут в этом случае иметь вид

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi'_1 \cos\varphi + \xi'_2 \sin\varphi + \beta_1, \\ \xi_2 = \xi'_1 \sin\varphi - \xi'_2 \cos\varphi + \beta_2. \end{cases}$$