

Матричные объекты

Определение 1.1.1. *Матрицей размера $m \times n$* называется упорядоченная прямоугольная таблица (или массив) чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа, образующие матрицу, называемые ее *элементами* (или *компонентами*), характеризуются как своим значением, так и номерами строк и столбцов, в которых они расположены. Условимся обозначать элемент матрицы, расположенный в i -ой строке и j -м столбце, как α_{ij}

Определение 1.1.2. Числа m , n и $m \times n$ называются *размерами матрицы*.

Матрицы обозначаются и записываются перечислением их элементов. Например, матрица с элементами

$$\alpha_{ij}; i = [1, m]; j = [1, n]$$

или же в развернутой форме:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

Если же потребуется неразвернутое представление матрицы, то мы запишем ее в виде $\|\alpha_{ij}\|$ или просто $\|A\|$.

Матрицы принято классифицировать по количеству их строк и столбцов.

Определение 1.1.3. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной, порядка n* .

Матрица размера $m \times 1$ называется m -мерным (или m -компонентным) *столбцом*.

Матрица размера $1 \times n$ называется n -мерной (или n -компонентной) *строкой*.

Отметим, что, хотя формально для обозначения строк или столбцов следует использовать двухиндексные записи $\|\alpha_{1j}\|$ или $\|\beta_{i1}\|$, неменяющиеся индексы принято опускать, в результате чего обозначения строк или столбцов имеют вид $\|\alpha_j\|$ или соответственно $\|\beta_i\|$.

Некоторые часто используемые матрицы с особыми значениями элементов имеют специальные названия и обозначения.

Определение
1.1.4.

Квадратная матрица, для которой

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad \forall i, j = [1, n],$$

называется *симметрической*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Нулевую матрицу обозначают как $\|O\|$.

Квадратная матрица порядка n вида

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|$$

называется *единичной*.

Единичную матрицу принято обозначать $\|E\|$.

Операции с матрицами

Определение 1.1.5. Две матрицы $\|A\|$ и $\|B\|$ считаются *равными* (обозначается: $\|A\| = \|B\|$), если они одинаковых размеров и если их соответствующие компоненты равны, то есть

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij} \quad \forall i = [1, m] \quad \text{и} \quad \forall j = [1, n].$$

Определение 1.1.6. Матрица $\|C\|$ называется *суммой матриц* $\|A\|$ и $\|B\|$ (обозначается: $\|C\| = \|A\| + \|B\|$), если матрицы $\|A\|$, $\|B\|$, $\|C\|$ одинаковых размеров и

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \quad \forall i = [1, m], \quad \forall j = [1, n],$$

где числа $\gamma_{ij} \quad \forall i = [1, m], \quad \forall j = [1, n]$ являются соответствующими компонентами матрицы $\|C\|$.

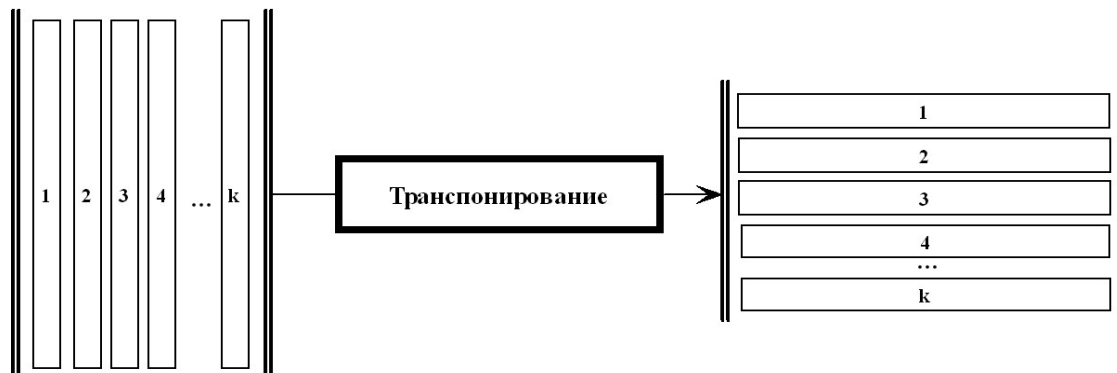
<p>Определение 1.1.7.</p>	<p>Матрица $\ C\$ называется <i>произведением числа λ на матрицу $\ A\$</i> (обозначается: $\ C\ = \lambda\ A\$), если матрицы $\ A\$ и $\ C\$ одинаковых размеров и</p> $\gamma_{ij} = \lambda\alpha_{ij} \quad \forall i = [1, m], \quad \forall j = [1, n].$
-------------------------------	---

Отметим, что умножать число можно на матрицу любого размера.

Замечание: в качестве всех (или некоторых) элементов матрицы допускается использование не только чисел, но и других математических объектов, для которых подходящим образом определены операции сравнения, сложения и умножения на число, например, векторов, функций или тех же матриц.

Определение 1.1.8. Транспонированием матрицы называется операция, в результате которой образуется новая матрица, где строками служат столбцы исходной, записанные с сохранением порядка их следования (рис. 1.1.1).

Матрица, получающаяся в результате транспонирования матрицы $\|A\|$, обозначается $\|A\|^T$.



Для элементов транспонированной матрицы $\|A\|^T$ верно равенство $\alpha_{ij}^T = \alpha_{ji}$ $\forall i = [1, m], \forall j = [1, n]$.

Операция транспонирования, например, не изменяет симметрическую матрицу, но переводит строку размера $1 \times m$ в столбец размера $m \times 1$ и наоборот.

Детерминанты (определители) квадратных матриц 2-го и 3-го порядков

Для квадратных матриц вводится специальная числовая характеристика, называемая детерминантом (или определителем) и обозначаемая как $\det \|A\|$.

Описание свойств определителей квадратных матриц n -го порядка будет приведено позднее, здесь же мы ограничимся рассмотрением случаев $n = 2$ и $n = 3$.

Определение
1.1.9.

Детерминантом (определителем) квадратной матрицы 2-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}.$$

Определение 1.1.10. Детерминантом (определителем) квадратной матрицы 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

называется число

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} +$$

$$+ \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}.$$

Для определителей квадратных матриц справедливы следующие теоремы:

Теорема
1.1.1.

Определитель матрицы 3-го порядка может быть выражен через определители 2-го порядка формулой следующего вида:

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11} \det \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \det \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \det \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix},$$

называемой *разложением определителя по первой строке*.

Раскладывать определители можно по любой строке (или столбцу), при условии, что знак каждого слагаемого с множителем α_{ij} равен $(-1)^{i+j}$.

Иногда подсчет значения определителя матрицы 3-го порядка удобнее выполнить иначе ('Метод треугольников')

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Со знаком "плюс"

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Со знаком "минус"

Следствие
1.1.1.

При транспонировании квадратных матриц 2-го или 3-го порядков их определители не меняются.

В терминах определителей матриц второго порядка достаточно удобно формулируется условие однозначной разрешимости системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Теорема 1.1.2 **Для того чтобы система линейных уравнений**
(Крамера).

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases}$$

имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пример 01. Найти все решения системы линейных уравнений $\begin{cases} \lambda\xi_1 + 4\xi_2 = \lambda \\ \xi_1 + \lambda\xi_2 = \lambda - 1 \end{cases}$ для любых значений параметра $\lambda \in \mathbf{R}$.

Решение: 1. Теорема Крамера утверждает: для того, чтобы система линейных уравнений $\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases}$ имела единственное решение $\{\xi_1^*; \xi_2^*\}$, необходимо и достаточно,

чтобы $\Delta \neq 0$, при этом $\xi_1^* = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ и $\xi_2^* = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \det \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

В случае, когда $\Delta = 0$, требуется специальное исследование.

2. В нашем случае

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4, \quad \Delta_1 = \det \begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ \lambda - 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \quad \text{и}$$
$$\Delta_2 = \det \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda.$$

Поэтому при $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ по теореме Крамера система имеет единственное решение

$$\xi_1^* = \frac{\lambda - 2}{\lambda + 2}; \quad \xi_2^* = \frac{\lambda}{\lambda + 2}.$$

3. Наконец, при $\lambda = -2$ система имеет вид $\begin{cases} -2\xi_1 + 4\xi_2 = -2, \\ \xi_1 - 2\xi_2 = -3. \end{cases}$ Решений тут нет.

При $\lambda = 2$ система будет $\begin{cases} 2\xi_1 + 4\xi_2 = 2, \\ \xi_1 + 2\xi_2 = 1. \end{cases}$ Она имеет бесчисленное множество

решений, описываемых формулой $\begin{cases} \xi_1^* = 1 - 2\tau \\ \xi_2^* = \tau \end{cases}; \tau \in (-\infty, +\infty).$

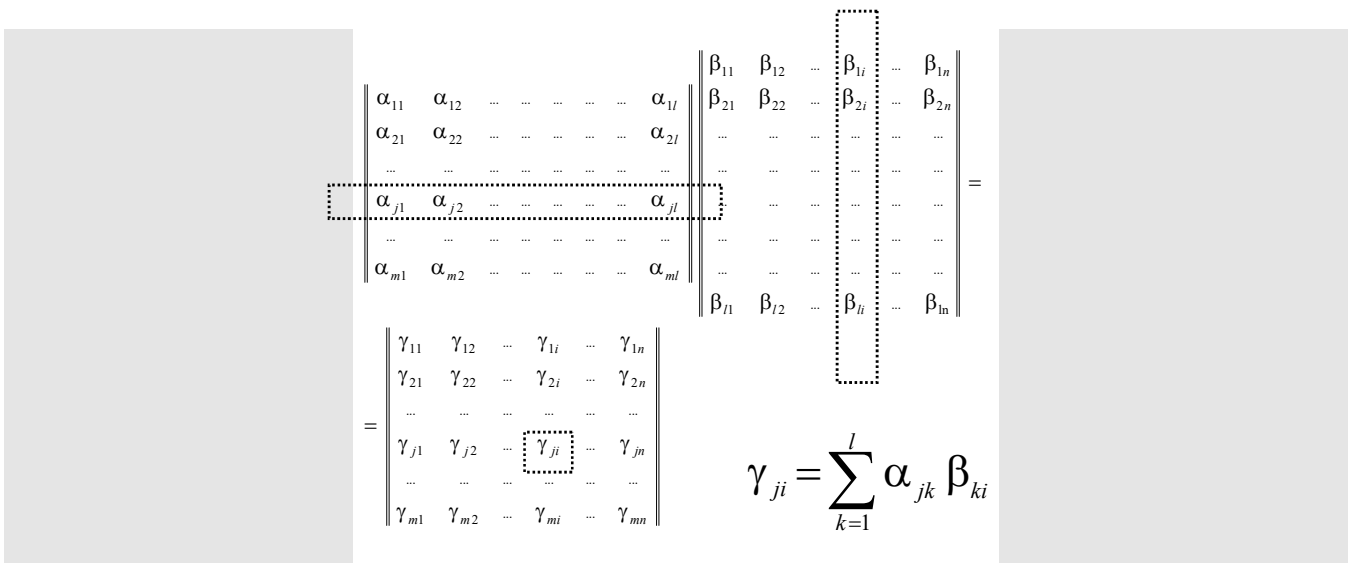
Произведение матриц

Определение 5.1.1. Матрица $\|C\|$ размера $m \times n$ с элементами $\gamma_{ji} \quad \forall i = [1, n], \forall j = [1, m]$ называется *произведением* матрицы $\|A\|$ размера $m \times l$ с элементами $\alpha_{jk} \quad \forall j = [1, m], \forall k = [1, l]$ на матрицу $\|B\|$ размера $l \times n$ с элементами $\beta_{ki} \quad \forall k = [1, l], \forall i = [1, n]$, где

$$\gamma_{ji} = \sum_{k=1}^l \alpha_{jk} \beta_{ki} \quad \forall i = [1, n], \forall j = [1, m].$$

Результат умножения матриц – матрица $\|C\|$

– есть матрица размера $m \times n$ при любом натуральном l , которая обозначается как $\|C\| = \|A\| \|B\|$. Правило нахождения компонентов произведения по компонентам сомножителей матричного произведения иллюстрирует следующий рисунок.



Из определения произведения матриц непосредственно следует, что для матриц подходящих размеров:

- 1) умножение матриц *некоммутативно*, то есть в общем случае $\|A\| \|B\| \neq \|B\| \|A\|$,
- 2) умножение матриц *ассоциативно*

$$\|A\| (\|B\| \|C\|) = (\|A\| \|B\|) \|C\|,$$

- 3) умножение матриц обладает свойством *дистрибутивности*

$$\|A\| (\|B\| + \|C\|) = \|A\| \|B\| + \|A\| \|C\|.$$

Определение 5.1.2. Матрица $\|A\|^{-1}$ называется *обратной* квадратной матрице $\|A\|$, если выполнены равенства

$$\|A\|^{-1}\|A\| = \|A\|\|A\|^{-1} = \|E\|.$$

Обратная матрица существует не для произвольной квадратной матрицы. Для существования матрицы, обратной к $\|A\|$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\det\|A\| \neq 0$

Определение 5.1.3. Матрица $\|A\|$, для которой $\det\|A\| = 0$, называется *вырожденной*, а матрица, для которой $\det\|A\| \neq 0$, – *невырожденной*.

Лемма 5.1.1. **Если обратная матрица существует, то она единственна.**

Теорема
5.1.1.

Имеет место соотношение

$$(\|A\| \|B\|)^T = \|B\|^T \|A\|^T.$$

Теорема
5.1.2.

Для невырожденных одинакового размера квадратных матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ справедливо соотношение

$$(\|A\| \|B\|)^{-1} = \|B\|^{-1} \|A\|^{-1}.$$

Задача
5.1.1.

Проверить тождество $(\|A\|^{-1})^T = (\|A\|^T)^{-1}$.

Определение
5.1.4.

Невырожденная квадратная матрица $\|Q\|$, для которой $\|Q\|^{-1} = \|Q\|^T$, называется *ортогональной*.