Операции с обобщенными функциями

Теперь мы рассмотрим подход, в котором обозначение обобщенной функции как (f,φ) не только корректно, но и достаточно эффективно.

Суть приема такова: мы получаем символическую форму записи некоторой операции с обобщенной функцией для *регулярного* случая (когда использование интеграла допустимо), а потом (предварительно убедившись в линейности и непрерывности результата операции) используем эту форму записи и для *сингулярного* случая, принимая ее за определение.

Умножение обычной функции на обобщенную

Используем эту схему для определения в D' операции "умножения на функцию".

Пусть $g(x)$ − бесконечно дифференцируемая обычная функция. Что мы можем принять за $g(x)f(x)$, если $f(x)\in D'$?

В регулярном случае мы имеем $(g(x)f,\,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\varphi(x)\,dx=(f,\,g(x)\varphi)$. По этому за функционал $g(x)f$ можно принять $(g(x)f,\,\varphi)=(f,\,g(x)\varphi)$.

Заметим, что, если $\varphi(x)$ − основная функция, то будет основной и $g(x)\cdot\varphi(x)$. Линейность и непрерывность нового функционала в этом определении проверьте самостоятельно.

Пример 1. Найти обобщенную функцию $y(x)$, являющуюся решением уравнения $xy(x)=0$.

Решение: Имеем в D' $p(x)\delta(x)=p(0)\delta(x)$ для любой бесконечно дифференцируемой функции $p(x)$. Действительно,

$$\big(p(x)\delta(x),\varphi(x)\big)=\big(\delta(x),\,p(x)\varphi(x)\big)=p(0)\varphi(0)=.\big(p(0)\delta(x),\varphi(x)\big)$$

Для $p(x)=x$ очевидно $p(0)=0$, поэтому решением данного уравнения является, например, . $y(x)=C\delta(x)$

Дифференцирование обобщенных функций

По этой же технологии можно определить и *производную* для обобщенной функции. Данное определение имеет вид

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') \ . \tag{1}$$

Действительно, для *регулярной* обобщенной функции $f(x)$, которая порождается обычной. непрерывно дифференцируемой функцией, согласно правилу интегрирования по частям, имеем в силу финитности $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$

$$f' = (f', \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -(f, \varphi') \ ,$$

что и дает основание принять формулу (1) за определение производной от обобщенной функции.

Из формулы (1) следует, что

- *каждая* обобщенная функция имеет производную *любого* порядка,
- операция дифференцирования обобщенной функции *линейна*:

$$((\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)', \varphi) = \lambda_1 (f_1', \varphi) + \lambda_2 (f_2', \varphi).$$

Для обобщенных функций справедлив аналог *формулы Лейбница*. Рассмотрим для примера случай $n=1$.

Пусть $f(x)$ − произвольная обобщенная функция, а $g(x)$ − регулярная обобщенная функция, порождаемая бесконечно дифференцируемой обычной функцией. Тогда

$$(f\cdot g)' = ((f\cdot g)',\varphi) = -((f\cdot g),\varphi') = -(f,g\varphi') =$$

$$= -(f,(g\cdot\varphi)' - g'\varphi) = (f,g'\varphi) - (f,(g\cdot\varphi)') =$$

$$= (fg',\varphi) + (f',g\varphi) = (fg',\varphi) + (f'g,\varphi) =$$

$$= (f'g,\varphi) + (fg',\varphi) = (f'g + fg',\varphi) = f'g + fg'.$$

Пример 2. Найти f' и f'' для обобщенной функции, порождаемой обычной функцией

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x \text{ при } x\le 0,\\ \beta x \text{ при } x>0.\end{cases}.$$

Решение: 1. Имеем

$$f'=-(f,\varphi')=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx=-\alpha\int\limits_{-\infty}^{0} x\,\varphi'(x)\,dx-\beta\int\limits_{0}^{+\infty} x\,\varphi'(x)\,dx=$$

$$=-\alpha\left(x\cdot\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0}-\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx\right)-\beta\left(x\cdot\varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty}-\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(x)\,dx\right)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\wp}\big(\alpha+(\beta-\alpha)\theta(x)\big)\varphi(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx\,,$$

где *функция Хевисайда* $\theta(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \dfrac{1}{2} & \text{при } x=0,\\ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$

В итоге, $f'(x)=\begin{cases}\alpha & \text{при } x<0,\\ \dfrac{\alpha+\beta}{2} & \text{при } x=0,\\ \beta & \text{при } x>0.\end{cases}$ Или $f'(x)=\alpha+(\beta-\alpha)\theta(x)$.

2. Для второй производной при помощи аналогичных рассуждениями получаем

$$f''=-(f',\varphi')=(f,\varphi'')=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi'(x)\,dx=-\alpha\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi'(x)\,dx-\beta\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi'(x)\,dx=$$

$$=-\alpha\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0}-\beta\varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty}=\left(\beta-\alpha\right)\varphi(0)=\left(\beta-\alpha\right)\delta(x).$$

3. Если учесть, что при $\alpha=-1$ и $\beta=1$ мы имеем $f(x)=|\,x\,|$, то в пространстве D' будут верны равенства $|\,x\,|'=\operatorname{sgn} x$ и $|\,x\,|''=2\delta(x)$.

Задача 2 иллюстрирует следующие правила дифференцирования регулярных обобщенных функций с разрывами 1-го рода, как у самих функций, так и у их производных.

Предположим, что порождающая функция непрерывна, но у ее производной есть разрыв первого рода в точке x_0 со "скачком" значения, равным A. Тогда производная обобщенной функции будет равна производной порождающей функции с добавкой вида $A\theta(x-x_0)$.

Если же скачок первого рода в точке x_0 величины A имеется у порождающей функции, то у ее обобщенной производной имеется слагаемое $A\delta(x-x_0)$.

Для решения задач часто оказывается полезной формула

$$p(x)\delta'(x) = p(0)\delta'(x) - p'(0)\delta(x).$$

Например: $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

Пример 3. Найти в D' вторую производную для регулярной функции $f(x) = |x| \sin x$.

Решение: По формуле Лейбница имеем

$$f'' = (|x| \sin x)'' = |x|'' \sin x + 2|x|'(\sin x)' + |x|(\sin x)''.$$

Поскольку $|x|' = \operatorname{sgn} x$ и $|x|'' = 2\delta(x)$, то получаем

$$f'' = 2\delta(x)\sin x + 2\operatorname{sgn} x \cdot \cos x - |x| \sin x \ .$$

Эту формулу можно упростить, используя метод решения задачи 1.

Действительно, в D' $\delta(x)\sin x = 0$, поскольку

$$\big(\delta(x)\sin x, \varphi(x)\big) = \big(\delta(x), \varphi(x)\sin x\big) = \varphi(0)\sin 0 = 0.$$

Поэтому окончательно

$$f'' = 2\operatorname{sgn} x \cdot \cos x - |x| \sin x \ .$$