Преобразование Фурье

Интеграл Фурье имеет многочисленные приложения в задачах механики и физики. При этом также часто оказывается востребованным тесно с ним связанный, комплексно-значный математический объект, называемый *преобразованием Фурье.*

Разберемся вначале, что это такое.

Интеграл Фурье функции $f(t)$, абсолютно интегрируемой на любом промежутке вещественной оси, кусочно-непрерывной $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ и имеющей при любом вещественном x односторонние производные, ставит в соответствие функцию

$$Y(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt \ .$$

Приняв во внимание, что выражение $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt$ есть четная функция по переменной ω, а выражение $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega(x-t)dt$ нечетная, мы можем написать, что

$$Y(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{+A} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt \qquad \text{и} \qquad 0 = \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{+A} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega(x-t)dt \,.$$

Если умножить обе части второго равенства на мнимую единицу и затем сложить оба равенства почленно, то *в пределе*, по формуле Эйлера мы получим.

$$Y(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt+\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega(x-t)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\big(\cos\omega(x-t)+i\sin\omega(x-t)\big)dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\omega(x-t)}dt\ .$$

А, если кроме того предположить, что функция $f(x)$ непрерывна, то $Y(x)=f(x)$, то последнее равенство можно записать в симметричной форме

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega x}d\omega\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\ . \qquad (1)$$

Здесь придется сделать "лирическое отступление" и вспомнить, что внешний интеграл в формуле (1) (то есть, интеграл по переменной ω) есть не просто несобственный интеграл с двумя особыми точками $+\infty$ и $-\infty$. А именно, предельный переход в обеих особых точках делался "синхронно", что запрещено по определению в обычном несобственном интеграле.

Иначе говоря, тут мы имеем дело с каким-то особым видом несобственных интегралов. Эту особенность поясняет

Пример 1. Найти $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$.

Этот интеграл несобственный, имеющий две особые точки: "$+0$" и "-0". Для его сходимости необходимо, чтобы он сходился в каждой из них. Возьмем, например, "$+0$". Имеем

$$I_{+0} = \int\limits_{\to +0}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \ln x \Big|_{\varepsilon}^{1} = -\lim_{\varepsilon \to +0} \ln \varepsilon = +\infty$$

Интеграл I_{+0} расходится, значит, расходится и интеграл I. Заметим, что также расходится и интеграл I_{-0}.

Теперь выполним предельный переход в точках "$+0$" и "-0" "синхронно", используя ту же схему, что и при выводе формулы (1):

$$I_{?} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\ln |\, x \,| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln x \Big|_{\varepsilon}^{1} \right) = 0 \ .$$

Откуда следует, что интеграл сходится.

Чтобы выделить несобственные интегралы такого рода, Коши предложил называть их интегралами *в смысле главного значения* и обозначать символом "v.p." (от фр. *valeur principale*). Так что, $\text{v.p.}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=0$.

Понятно, что из сходимости несобственного интеграла в обычном смысле следует его сходимость в смысле главного значения, но не наоборот.

Для решения практических задач оказалось удобным, исходя из формулы (5), дать

Определение 1. Функция

$$\hat{f}(\omega) = \text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

называется *преобразованием Фурье* функции $f(x)$, а функция

$$\tilde{f}(\omega) = \text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x}dx$$

− *обратным преобразованием* Фурье.

Часто также используются обозначения

$$\hat{f}(\omega) = F[f] \text{ и } \tilde{f}(\omega) = F^{-1}[f].$$

Пример 2. Найти *обратное* преобразование Фурье для функции

$$f(x)=\begin{cases}1,\ \text{при}\ |\,x\,|\le u,\\ 0,\ \text{при}\ |\,x\,|>u.\end{cases}.$$

Решение: Для $\tilde{f}(\omega)$ имеем

$$\tilde{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{i\omega x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-u}^{u}e^{i\omega x}\,dx=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{i\omega u}-e^{-i\omega u}}{2i\omega}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin u\omega}{\omega}.$$

Пример 3. Найти преобразование Фурье для функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Для $\hat{f}(\omega)$ имеем

$$\hat{f}(\omega)=F\left[\frac{1}{1+x^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{-i\omega x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\,dx-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\omega x)}{1+x^2}\,dx=$$

в силу четности косинуса и нечетности синуса, а также используя значение интеграла Лапласа, получаем

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\pi}{2}e^{-|\omega|}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|\omega|}.$$

Свойства преобразования Фурье

Сформулируем основные свойства преобразования Фурье.

1°. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbf{R}$, тогда $\hat{f}(\omega)$ непрерывная и ограниченная на $\mathbf{R}$ функция у которой $\lim\limits_{\omega\to\pm\infty}\hat{f}(\omega)=0$.

2°. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и имеет конечные односторонние производные на $\mathbf{R}$, тогда
$$F^{-1}[F[f]]=F[F^{-1}[f]]=f\ .$$

3°. Линейность преобразования Фурье: если преобразования Фурье от функций f и g существуют, то для любых комплексных λ и μ верно равенство

$$F[\lambda f+\mu g]=\lambda F[f]+\mu F[g]\ .$$

4°. *Преобразование Фурье от производной функции*: если производные функции $f^{(k)}(x)$ $k=0,1,2,\dots n$ непрерывно дифференцируемы и абсолютно интегрируемы, то

$$\forall k=[1,n] \qquad F[f^{(k)}]=(i\omega)^k F[f].$$

При этом $\exists C>0$ такое, что $\left|F[f]\right|\le\dfrac{C}{\left|\omega^n\right|}$.

Другими словами, чем *больше* абсолютно интегрируемых производных имеет функция, тем *быстрее* стремится к нулю на бесконечности ее преобразование Фурье и наоборот.

5°. *Производная преобразования Фурье*: пусть функция $f(x)$ непрерывна, а функции вида $x^k f(x)$ $\forall k=0,1,2,\dots n$ абсолютно интегрируемы на $\mathbf{R}$, тогда ее преобразование Фурье $\hat f(\omega)$ есть n раз дифференцируемая на $\mathbf{R}$ функция. При этом

$$\hat f^{(k)}(\omega)=(-i)^k F[x^k f(x)] \quad k=[1,n].$$

Использование свойств преобразования Фурье проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 4. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{1+|x^5|}$. Показать, что

1) $\hat{f}(\omega)$ имеет на $\mathbf{R}$ непрерывную производную третьего порядка;

2). $\hat{f}(\omega)=O\left(\dfrac{1}{\omega^5}\right)$ при $\omega\to\infty$.

Решение:

1) Достаточные условия интегрируемости (признак сравнения) функции $f(x)=\dfrac{x^k}{1+|x^5|}$ суть $k=1,2,3$. Значит, по свойству 5⁰ $\hat{f}(\omega)=F[f]$ имеет производные до третьего порядка включительно.

2) Функция $\dfrac{1}{1+|x^5|}$ имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно и кусочно-непрерывную *пятую* производную вида $120\,\mathrm{sign}(x)$. Тогда из свойства 4⁰ получаем требуемую оценку.

Пример 5. На множестве $x \in \mathbf{R}, t \geq 0$ найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $-$ *теплопроводности* такую, что $u(x,0) = u_0(x)$.

Решение: введем следующие обозначения: $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t^{/}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x^{/}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}^{//}$. Кроме того, будем предполагать, что функции $u(x,t), u_x^{/}(x,t), u_{xx}^{//}(x,t)$ абсолютно интегрируемы по x на всей вещественной оси при каждом $t \geq 0$. Наконец, также условимся, что $\exists \varphi(x): \forall t \geq 0 \ \left| u_t^{/}(x,t) \right| \leq \varphi(x)$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx < +\infty$. (6)

<u>*Основная идея*</u>: к обеим частям уравнения $u_t^{/} = u_{xx}^{//}$ применим преобразование Фурье по x, считая t параметром.

Пусть

$$F[u(\omega,t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx .$$

Для большей наглядности мы не будем применять свойство 4^0, а используем непосредственно определение преобразования Фурье.

Тогда, проинтегрировав два раза по частям и учтя, что проинтегрированные слагаемые в силу (6) зануляются, получим равенства

$$F[u''_{xx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u''_{zz} e^{-i\omega z} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(u'_z e^{-i\omega z} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u'_z e^{-i\omega z} dz \right) =$$

$$= \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \left(u e^{-i\omega z} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\omega z} dz \right) = -\omega^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\omega z} dz = -\omega^2 F[u]$$

С другой стороны, в силу сделанных предположений, и, поскольку в преобразованному по Фурье уравнению, ω − параметр, $F[u_t^/]=F\left[\dfrac{\partial u}{\partial t}\right]=\dfrac{dF}{dt}$. И таким образом, исходное уравнение в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (где неизвестным является функция F) вида:

$$\frac{dF}{dt}=-\omega^2 F\ ,$$

общее решение которого есть семейство функций $\hat{f}(\omega,t)=D(\omega)e^{-\omega^2 t}$.

Начальным условием при $t=0$ в нашей задаче является функция $u_0(x)$, преобразование которой по Фурье − функция $D(\omega)$. Это означает, что $D(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_0(z)e^{-i\omega z}dz$.

В итоге получаем, что искомое *решение уравнения теплопроводности* находится путем применения к функции $\hat{f}(\omega,t)$ *обратного* преобразования Фурье.

Следовательно,

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}D(\omega)e^{i\omega x-\omega^2 t}d\omega \ , \quad \text{где } D(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_0(z)e^{-i\omega z}dz\,.$$

Например (проверьте самостоятельно, использовав решение задачи §17, №8(2)), что, если $u_0(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, то $\hat{f}(\omega,t)=e^{-\omega^2\left(t+\frac{1}{2}\right)}$. Откуда получается, что

$$u(x,t)=F^{-1}\left[e^{-\omega^2\left(t+\frac{1}{2}\right)}\right]=\frac{1}{\sqrt{2t+1}}e^{-\frac{x^2}{4t+2}}\,.$$